No. IX.

Under the patronage of the government of Bengal, and dedicated, by permission, to the Governor General of India.

ENCYCLOPÆDIA BENGALENSIS,

Or a series of publications in English and Bengali,

COMPILED FROM VARIOUS SOURCES,

ON HISTORY, SCIENCE AND LITERATURE,

EDITED

BY THE REV K. M. BANERJEA.

" ψυχῆς ἰατρεῖον "

Diod. Sic. I. 49.

Mathematics,

GEOMETRY

PART II.

CALCUTTA:

[illegible]ELL, AND LEPAGE, AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

[illegible]

R. Rodrigues, Printer,

Sumachar Chundrica Press.

ELEMENTS OF GEOMETRY,

THE FOURTH, FIFTH, AND SIXTH BOOKS

OF EUCLID,

BY JOHN PLAYFAIR, F. R. S.

WITH ADDITIONS

BY WILLIAM WALLACE, A. M. F. R. S. E.

AND A SYMBOLICAL DEMONSTRATION AS BEFORE

TO WHICH IS ADDED A SELECTION FROM BLAND'S

GEOMETRICAL PROBLEMS, AND THE LILAVATI.

Calcutta:

OSTELL AND LEPAGE AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

1848.

বিদ্যাকল্পদ্রুম।

অর্থাৎ বিবিধ বিদ্যা বিষয়ক রচনা

শ্রীকৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় দ্বারা

সংগৃহীত

নবম কাণ্ড।

[illegible]

[illegible]

ইউক্লিডের চতুর্থ পঞ্চম ষষ্ঠ অধ্যায় জ্ঞান
প্লেফেয়ারের টীকানুসারে ও উলিয়ম
ওয়ালেসের অতিরিক্ত লিখনানু
সারে অনুবাদিত।

সর্বশেষে ব্রাণ্ড নামক গ্রন্থকারের ক্ষেত্রতত্ত্ব বিষয়ক
গ্রন্থ হইতে এবং পাঁমারেটীর অন্তর্গত ক্ষেত্র
ব্যবহার হইতে কতিপয় প্রশ্ন উদ্ধৃত।

কলিকাতা সমাচার চন্দ্রিকা যন্ত্রে শ্রীযুত আর রড্রিগস্
সাহেব কর্তৃক মুদ্রিত হইল।

ইং ১৮৪৮। শক ১৭৬৯

CONTENTS.

GEOMETRY.

PART II.

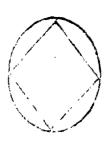
ELEMENTS OF GEOMETRY

BOOK IV.

DEFINITIONS.

I. A RECTILINEAL figure is said to be inscribed in another rectilineal figure, when all the angles of the inscribed figure are upon the sides of the figure in which it is inscribed, each upon each.

II. In like manner, a figure is said to be described about another figure, when all the sides of the circumscribed figure pass through the angular points of the figure about which it is described, each through each.

III. A rectilineal figure is said to be inscribed in a circle, when all the angles of the inscribed figure are upon the circumference of the circle.

ক্ষেত্র তত্ত্ব।

৪ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার তাৎপর্য্য এই যে যাহার মধ্যে ঐ অন্তর্গত ক্ষেত্র অঙ্কিত হয় তাহার প্রত্যেক পার্শ্বে অন্তর্গত ক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ সংলগ্ন হইবে।

২। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য ক্ষেত্রের উপরি অঙ্কিত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার তাৎপর্য্য এই যে যাহার উপর অঙ্কিত হয় তাহার কোণের সহিত ঐ উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের সমুদায় পার্শ্ব একৈক সংলগ্ন হইবেক।

৩। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্র বৃত্তের অন্তর্গত বলিয়া বর্ণিত হইলে তাহার তাৎপর্য্য এই যে অন্তর্গত ক্ষেত্রের সমুদায় কোণ বৃত্তের পরিধিতে সংলগ্ন হইবেক।

IV. A rectilineal figure is said to be described about a circle, when each side of the circumscribed figure touches the circumference of the circle.

V. In like manner, a circle is said to be inscribed in a rectilineal figure, when the circumference of the circle touches each side of the figure.

VI. A circle is said to be described about a rectilineal figure, when the circumference of the circle passes through all the angular points of the figure about which it is described.

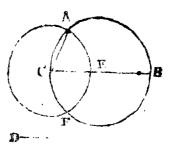
VII. A straight line is said to be placed in a circle, when the extremities of it are in the circumference of the circle.

PROP. I. PROB.

In a given circle to place a straight line, equal to a given straight line, not greater than the diameter of the circle.

Let ABC be the given circle, and D the given straight line, not greater than the diameter of the circle.

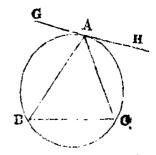
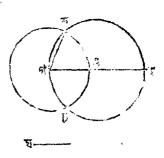
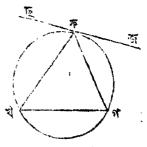
Draw BC the diameter of the circle ABC; then, if BC be equal to D, the thing required is done: for in the circle ABC a straight line BC is placed equal to D: But, if BC be not equal (3. 1.) to D, it must be greater; cut off from it CE equal to D, and from the centre C, at the distance CE describe the circle AEF, and join CA: Therefore,

because C is the centre of the circle AEF, CA is equal to CE; but D is equal to CE; therefore D is equal to CA: Wherefore, in the circle ABC, a straight line is placed, equal to the given straight line D, which is not greater than the diameter of the circle. *Which was to be done.*

Symbolical Demonstration. Because C is the centre of ⊙ AFE, AC = CE. But CE = D (by constr.) ∴ AC = D.

PROP. II. PROB.

In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.

Let ABC be the given circle, and DEF the given triangle: it is required to inscribe in the circle ABC a triangle equiangular to the triangle DEF.

Draw (17. 3) the straight line GAH, touching the circle in the point A, and at the point A, in the straight line AH, make (23. 1.) the angle HAC equal to the angle DEF; and at the point A, in the straight line AG, make the angle GAB equal to the angle DFE, and

join BC. Therefore, because HAG touches the circle ABC, and AC is drawn from the point of contact, the angle HAC is equal (32. 3.) to the angle ABC in the alternate segment of the circle But HAC is equal to the angle DEF; therefore also the angle ABC is equal to DEF; for the same reason, the angle ACB is equal to the angle DFE; therefore the remaining angle BAC is equal (32. 1.) to the remaining angle EDF: Wherefore the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF, and it is inscribed in the circle ABC. *Which was to be done.*

Symb. Dem. Because GH touches ⊙ in A, ∠ ABC = ∠ HAC (32.3) = ∠ DEF. Similarly ∠ ACB = ∠ DFE ∴ remaining ∠ BAC = remaining ∠ EDF ∴ △ ABC is equiangular to △ DEF.

PROP. III. PROB.

About a given circle to describe a triangle equiangular to a given triangle.

Let ABC be the given circle, and DEF the given triangle; it is required to describe a triangle about the circle ABC equiangular to the triangle DEF.

Produce EF both ways to the points G, H, and find the centre K of the circle ABC, and from it draw any straight line KB; at the point K in the straight line KB, make (23. 1.) the angle BKA equal to the angle DEG, and the angle BKC equal to the angle DFH; and through the points A, B, C, draw the straight lines LAM, MBN, NCL touching (17. 3.) the circle ABC: Therefore, because LM, MN, NL touch the circle ABC in the points A, B, C, to which from the centre are drawn KA, KB, KC, the angles at the points A, B, C, are right (18. 3.) angles. And because the four

ছকখ কোণ ঘচঙ কোণ সমান করিয়া অঙ্কিত কর পরে খগ সংযুক্ত কর। ছকজ সরল রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং স্পর্শ চিহ্ন ক হইতে কগ নিঃসৃত হইয়াছে একারণ (৩।৩২), জকগ কোণ অপর পার্শ্বীয় খণ্ডস্থ কখগ কোণের সহিত সমান। অপর জকগ কোণ ঘঙচ সমান সুতরাং কখগ কোণও ঘঙচ সমান। তদ্রূপ কগখ কোণ ঘচঙ সমান অতএব অবশিষ্ট খকগ কোণও ঙঘচ সমান (১।৩২) সুতরাং কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি হইয়া কখগ বৃত্তে অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

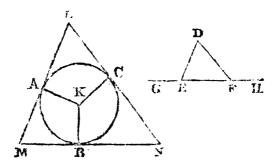
সং উ.। ছকজ ক বিন্দু স্পর্শ করে ∴ ∠ কখগ = ∠ জকগ (৩।৩২) = ∠ ঘঙচ। তদ্রূপ ∠ কগখ = ∠ ঘচঙ ∴ অবশিষ্ট ∠ খকগ = অবশিষ্ট ∠ ঙঘচ ∴ △ কখগ ও △ ঘঙচ সমান কোণি।

৩ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান কোণি ত্রিভুজ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তোপরি অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘঙচ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ। কখগ বৃত্তোপরি ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঙচ সরল রেখা দুই দিকে ছ এবং জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং কখগ বৃত্তের ট কেন্দ্র নির্দ্দেশ করিয়া তথা হইতে টখ সরল রেখা নিষ্কাসন কর। ট বিন্দুতে টখ সরল রেখায় খটক কোণ ঘঙছ কোণের সমান করিয়া (১।২৩) এবং খটগ কোণ ঘচজ কোণের সমান করিয়া নিষ্কাসন কর পরে ক, খ, গ বিন্দু দিয়া কখগ বৃত্ত স্পর্শক ঠড, ডচ, ঠচ সরল রেখা টান (৩।১৭)। ঠড ডচ, ঠচ, সরল রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং ট কেন্দ্র হইতে ক, খ, গ, স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত টক, টখ, টগ সরল রেখা টানা

angles of the quadrilateral figure AMBK are equal to four right angles, for it can be divided into two triangles; and because two of them, KAM, KBM are right

angles, the other two AKB, AMB are equal to two right angles. But the angles DEG, DEF, are likewise equal (13. 1.) to two right angles; therefore the angles AKB, AMB are equal to the angles DEG, DEF, of which AKB is equal to DEG; wherefore the remaining angle AMB is equal to the remaining angle DEF. In like manner, the angle LNM may be demonstrated to be equal to DFE; and therefore the remaining angle MLN is equal (32. 1.) to the remaining angle EDF: Wherefore the triangle LMN is equiangular to the triangle DEF: And it is described about the circle ABC. *Which was to be done.*

Symb. Dem. <s at A, B, C are right <s (18.3) and 4 <s of the Fig. AMBK = 4 right <s and < KAM + KBM = 2 right <s ∴ < AMB + < AKB = 2 right <s = < DEG + < DEF (13.3). But < AKB = < DEG (by constr.) ∴ < AMB = < DEF. Similarly < = LNM < DFE ∴ < MLN = < EDF ∴ △ MLN is equiangular to △ DEF.

গিয়াছে অতএব ক, খ, গ বিন্দুতে যেই কোণ উৎপন্ন হইল সে সকল সম কোণ (৩।১৮)। অধিকন্তু কডখট চতুর্ভুজ

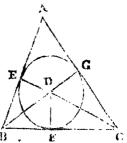
দুই ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে সুতরাং তদন্তঃপাতি চারি কোণ একত্র সংযোগে চারি সমকোণ তুল্য হইবে তাহার মধ্যে টকড এবং টখড প্রত্যেকে এক২ সম কোণ সুতরাং অবশিষ্ট দুই কোণও অর্থাৎ কটখ এবং কডখ একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইবে। অপর ঘঙছ এবং ঘঙচ দুই কোণ একত্র দুই সমকোণ তুল্য (১।১৩) অতএব কটখ এবং কডখ একত্র ঘঙছ এবং ঘঙচ সমান অধিকন্তু কটখ ঘঙছ সমান কৃত হইয়াছে সুতরাং অবশিষ্ট কডখ অবশিষ্ট ঘঙচ সমান। তদ্রূপ ঠচড কোণও ঘচঙ সমান উপপন্ন করা যাইতে পারে অতএব অবশিষ্ট ডঠচ কোণ ঙঘচ কোণের সমান (১।৩২) সুতরাং ঠডচ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের তুল্য কোণি হইয়া কখগ বৃত্তোপরি অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ। ক, খ, গ, বিন্দুস্থ < সম < (৩।১৮) এবং কডখট ক্ষেত্রস্থ ৪< = ৪ সম < এবং < টকড + টখড = ২ সম < ∴ < কডখ + < কটখ = ২ সম < = ঘঙছ + ঘঙচ (১।১৩) কিন্তু < কটখ = ঘঙছ (অঙ্কপাত) ∴ < কটখ = < ঘঙচ। তদ্রূপ < ঠচড = < ঘচঙ ∴ < ডঠচ = ঙঘচ ∴ △ ডঠচ ও △ ঘঙচ সমান কোণি।

PROP. IV. PROB.

To inscribe a circle in a given triangle.

Let the given triangle be ABC, it is required to inscribe a circle in ABC.

Bisect (9. 1.) the angles ABC, BCA, by the straight lines BD, CD, meeting one another in the point D, from which draw (12. 1.) DE, DF, DG perpendiculars to AB, BC, CA. Then because the angle EBD is equal to the angle FBD, the angle ABC being bisected by BD: and because the right angle BED is equal to the right angle BFD, the two triangles EBD, FBD

have two angles of the one equal to two angles of the other; and the side BD, which is opposite to one of the equal angles in each, is common to both: therefore their other sides are equal (26. 1.); wherefore DE is equal to DF. For the same reason, DG is equal to DF; therefore the three straight lines DE, DF, DG are equal to one another, and the the circle described from the centre D, at the distance of any of them, will pass through the extremities of the other two, and will touch the straight lines AB BC, CA, because the angles at the points E, F, G are right angles, and the straight line which is drawn from the extremity of a diameter at right angles to it, touches (Cor. 16. 3.) the circle: Therefore the straight lines AB, BC, CA, do

৪ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ, তন্মধ্যে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগ এবং খগক এই দুই কোণকে খঘ এবং গঘ দ্বারা দ্বিখণ্ড কর (১। ৯) ঘ বিন্দুতে ঐ দুই রেখার সম্পাত হউক সেই ঘ বিন্দু হইতে ঘঙ ঘচ এবং ঘছ সরল রেখা কখ খগ এবং কগ সরল রেখার উপর লম্বভাবে পতিত হউক (১। ১২)। কখগ কোণ খঘ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হওয়াতে ঙখঘ কোণ চখঘ কোণের সমান এবং খঙঘ ও খচঘ প্রত্যেকে সমকোণ এপ্রযুক্ত পরস্পর সমান একারণ ঙখঘ এবং চখঘ দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটীর দুই কোণের সমান এবং সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু খঘ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু রূপে আছে অতএব তাহারদের অন্যান্য বাহুও পরস্পর সমান (১২৬,) সুতরাং ঘঙ ঘচ পরস্পর সমান। ঐ কারণ বশতঃ ঘচ ঘছ সরল রেখাও পরস্পর সমান অতএব ঘঙ, ঘচ, ঘছ এই তিন সরল রেখা পরস্পর সমান সুতরাং ঘ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ তিনের মধ্যে কোন রেখার প্রান্ত পর্য্যন্ত বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সে বৃত্ত ঐ তিন রেখারই অগ্র দিয়া যাইবে এবং কখ খগ গক সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে যেহেতু ঙ চ ছ বিন্দুতে যে২ কোণ আছে সে সকল সম কোণ এবং ব্যাসের অগ্র বিন্দু হইতে লম্ব টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে (৩।১৬ অনুমান) অতএব কখ খগ গক সরল রেখা প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে

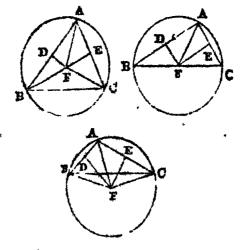
each of them touch the circle, and the circle EFG is inscribed in the triangle ABC. *Which was to be done*

Sym. Dem. < EBD = < FBD (by constr.) < BED = < BFD (by constr.) and BD is common to △s EBD, FBD ∴ DE = DF (26.1). Similarly DG = DF ∵ DE = DG = DF ∴ DG, DF, DE, are radii of a ⊙ touched by AB, BC, AC (Cor. 16.3).

PROP. V. PROB.

To describe a circle about a given triangle.

Let the given triangle be ABC; it is required to describe a circle about ABC

Bisect (10. 1.) AB, AC in the points D, E, and from these points draw DF, EF at right angles (11. 1.) to

AB, AC; DF, EF produced will meet one another; for, if they do not meet, they are parallel, wherefore AB, AC which are at right angles to them are parallel,

সুতরাং ঙচছ বৃত্ত কখগ ত্রিভুজের অন্তর্গত হইল, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

সং উ। ∠ ঙখঘ = ∠ চখগ (অঙ্কপাত) ∠ খঙঘ = ∠ খচঘ (অঙ্কপাত) এবং খঘ △ ঙখঘ ও △ চখঘ পক্ষে সামান্য বাহু ∴ ঘঙ = ঘচ (১।২৬) তদ্রূপ ঘছ = ঘচ ∴ ঘঙ = ঘছ = ঘচ ∴ ঘছ, ঘচ, ঘঙ রেখা কখ খগ কগ রেখা স্পৃষ্ট ⊙ কক্ষট (৩। ১৬ অনুমান)

৫ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের উপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে। কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ, তাহার উপরে বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ কগ দুই সরল রেখাকে ঘ এবং ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১।১০) এবং ঐ দুই বিন্দু হইতে কখ, কগ সরল রেখার লম্ব স্বরূপ ঘচ এবং ঙচ টান (১।১১)। অপর ঘচ ঙচ বৃদ্ধি পাইলে অবশ্য কোন স্থলে পরস্পর সংলগ্ন হইবে যদি সংলগ্ন না হয় তবে তাহারা সমানান্তরাল হইবে এবং কখ, কগ সরল রেখাও তাহারদের লম্ব প্রযুক্ত সমা-

নান্তরাল উপপন্ন হইবে কিন্তু তাহা হইলে যুক্তি বিরুদ্ধ হয় সুতরাং তদ্রূপ কল্পনা করা যায় না অতএব ঐ দুই রেখা চ বিন্দুতে সংলগ্ন হউক। চক সংযুক্ত কর এবং চ বিন্দু যদি খগ সরল রেখাস্থ না হয় তবে খচ গচ ও সংযুক্ত কর। অপর

which is absurd: Let them meet in F. and join FA also, if the point F be not in BC, join BF, CF. then because AD is equal to DB, and DF common, and at right angles to AB, the base AF is equal (4. 1.) to the base FB. In like manner, it may be shewn, that CF is equal to FA; and therefore BF is equal to FC and FA, FB, FC are equal to one another; wherefore the circle described from the centre F. at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other two, and be described about the triangle ABC. *Which was to be done.*

Cor. When the centre of the circle falls within the triangle, each of its angles is less than a right angle, each of them being in a segment greater than a semicircle; but when the centre is in one of the sides of the triangle, the angle opposite to this side, being in a semicircle, is a right angle; and if the centre falls without the triangle, the angle opposite to the side beyond which it is, being in a segment less than a semicircle, is greater than a right angle. Wherefore, *if the given triangle be acute-angled, the centre of the circle falls within it; if it be a right-angled triangle, the centre is in the side opposite to the right angle; and if it be an obtuse-angled triangle, the centre falls without the triangle, beyond the side opposite to the obtuse angle.*

Sym. Dem. AD = DB (by constr.) DF common to △s ADF BDF and DF ⊥ AB ∴ AF = FB (4.1) Similarly CF = AF ∴ FB = CF = AF ∴ the ⊙ described from F at the distance FB will pass through A, B, C.

PROP. VI. PROB.

To inscribe a square in a given circle.

Let ABCD be the given circle; it is required to inscribe a square in ABCD.

কঘ খঘ সমান এবং ঘচ রেখা কচঘ এবং খচঘ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু অথচ কখ সরল রেখার লম্ব অতএব (১৪) খচ ভূমি কচ ভূমির সমান হইবে। তদ্রূপ গচ কচ দুই রেখাও সমান ইহা সপ্রমাণ হইতে পারে অতএব খচ গচ রেখাও সমান সুতরাং খচ কচ গচ তিন সরল রেখা পরস্পর সমান এককারণ ঐ তিনের কোন রেখার পরিমাণ দূরে চ বিন্দু হইতে বৃত্ত টানিলে তাহা সমুদয়ের অগ্র দিয়া যাইবে এবং কখগ ত্রিভুজোপরি অঙ্কিত হইবে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

অনুমান। বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ অর্দ্ধ বৃত্তাপেক্ষা বৃহত্তর খণ্ডস্থ হওয়াতে সমকোণ হইতে ন্যূন হইবে। ত্রিভুজের কোন বাহুতে কেন্দ্র সম্পাত হইলে সেই বাহুর সম্মুখবর্ত্তি কোণ অর্দ্ধ বৃত্তস্থ প্রযুক্ত সমকোণ হইবে। ত্রিভুজের বাহিরে কেন্দ্রপাত হইলে যে বাহুর বাহিরে কেন্দ্রপাত হয় তাহার সম্মুখবর্ত্তি কোণ অর্দ্ধ বৃত্ত হইতে লঘুতর খণ্ডস্থিত প্রযুক্ত সমকোণ হইতে অধিক হইবে। অতএব নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ লঘুকোণি হইলে তন্মধ্যেই কেন্দ্রপাত হয়, সমকোণি হইলে সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুতে কেন্দ্রপাত হয়, অধিক কোণি হইলে অধিক কোণের সম্মুখস্থ বাহু উল্লঙ্ঘন করিয়া ত্রিভুজের বাহিরে কেন্দ্রপাত হয়।

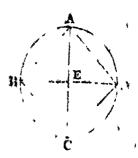
কঘ = খঘ (অঙ্কপাত), ঘচ, কঘচ ও খঘচ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং ঘচ ⊥ কখ ∴ কচ = চখ (১৪) তদ্রূপ গচ = কচ ∴ চখ = গচ = কচ ∴ চ কেন্দ্র হইতে চখ দূরে ⊙ অঙ্কিত করিলে তাহা ক, খ, গ সংলগ্ন হইবে।

---

৬ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে সম চতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবেক।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, তন্মধ্যে সম চতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবেক।

Draw the diameters AC, BD at right angles to one another, and join AB, BC, CD, DA; because BE is equal to ED, E being the centre, and because EA is at right angles to BD, and common to the triangles ABE, ADE; the base BA is equal (4. 1.) to the base AD; and for the same reason, BC, CD are each of them equal to BA or AD; therefore the quadrilateral figure ABCD is equilateral. It is also rectangular, for the straight line BD being a diameter of the circle ABCD, BAD is a semicircle; wherefore the angle BAD is a right (31. 3.) angle; for the same reason, each of the angles ABC, BCD, CDA is a right angle; therefore the quadrilateral figure ABCD is rectangular, and it has been shown to be equilateral; therefore it is a square; and it is inscribed in the circle ABCD. *Which was to be done.*

Synt. Dem. BE = ED, EA ⊥ BD and common to △s AEB, AED ∴ (4.1) BA = AD. Similarly BC = CD = AD = BA ∴ fig. ABCD is equilateral. Again ∠BAD is a right ∠ (31.3) Similarly ∠s ABC, BCD, CDA, are right ∠s ∴ fig ABCD is rectangular ∴ it is a □.

PROP. VII. PROB.

To describe a square about a given circle.

Let ABCD be the given circle; it is required to describe a square about it.

কগ খঘ দুই ব্যাস পরস্পর লম্বভাবে টানিয়া কখ, খগ, গঘ-

ঘক সংযুক্ত কর। ঙ কেন্দ্র হওয়াতে খঙ ঘঙ পরস্পর সমান (১।১১সংজ্ঞা) কঙ রেখা খঘ সরল রেখার লম্ব এবং কখঙ কঘঙ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে খক ভূমি কঘ ভূমির সমান উপপন্ন হইল (১।৪)। ঐ কারণে খগ গঘ দুই সরল রেখাও প্রত্যেকে খক অথব কঘ সমান সুতরাং কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সম বাহুক। অপর ঐ ক্ষেত্র সমকোণিও বটে কেননা খঘ সরল রেখা কখগঘ বৃত্তের ব্যাস হওয়াতে খকঘ অর্দ্ধ বৃত্ত ভমিস্থিত খকঘ কোণ সমকোণ (৩।৩১) ঐ কারণে কখগ খগঘ এবং গঘক তিন কোণও প্রত্যেকে সমকোণ অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ সমকোণি। পূর্ব্বে তাহা সমবাহুকও উপপন্ন হইয়াছে সুতরাং ঐ ক্ষেত্র সমচতুর্ভুজ এবং কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

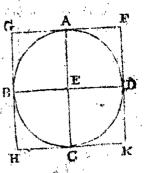
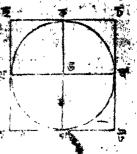
খঙ = ঘঙ, ঙক ⊥ খঘ এবং কঙখ ও কঙঘ ত্রিভুজের সামান্য বাহু ∴ (১।৪) খক = কঘ তদ্রূপ খগ = গঘ = কঘ = খক ∴ কখগঘ ক্ষেত্র সম বাহুক। অপিচ ∠ খকঘ সম ∠ (৩।৩১) তদ্রূপ কখগ, খগঘ, গঘকও সম ∠ ∴ কখগঘ সম কোণি ∴ তাহা □।

---

৭ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তোপরি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, তাহার উপরে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

Draw two diameters AC, BD of the circle ABCD, at right angles to one another, and through the points A, B, C, D draw (17. 3.) FG, GH, HK, KF touching the circle; and because FG touches the circle ABCD, and EA is drawn from the centre E to the point of contact A, the angles at A are right (18. 3.) angles; for the same reason, the angles at the points B, C, D are right angles; and because the angle AEB is a right angle, as likewise is EBG, GH is parallel (28. 1.) to AC: for the same reason, AC is parallel to FK, and, in like manner, GF, HK may each of them be demonstrated to be parallel to BED; therefore the figures GK, GC, AK, FB, BK, are parallelograms; and GF is therefore equal (34. 1.) to HK, and GH to FK; and because AC is equal to BD, and also to each of the two GH, FK; and BD to each of the two GF, HK: GH, FK are each of them equal to GF or HK; therefore the quadrilateral figure FGHK is equilateral. It is also rectangular; for GBEA being a parallelogram, and AEB a right angle, AGB (34. 1). is likewise a right angle. In the same manner, it may be shewn, that the angles at H, K, F are right angles: therefore the quadrilateral figure FGHK is rectangular; and it was demonstrated to be equilateral; therefore it is a square; and it is described about the circle ABCD. *Which was to be done.*

Sym. Dem. $<$s at A, C are right $<$s (18.3) so are $<$s at B, C, D ∴ GH ∥ AC (28.1). Similarly AC ∥ FK, and GF, HK each ∥ BED ∴ GK, GC, AK, FB, BK each a ▭ ∴ GF = HK (34.1) and GH = FK.

কখগঘ বৃত্তের কগ খঘ দুই ব্যাস পরস্পরের লম্ব ভাবে টান এবং ক খ গ ঘ বিন্দু দিয়া চছ ছজ জট টচ বৃত্তস্পর্শক চারি সরল রেখা টান। অপর চছ বৃত্তস্পর্শক এবং উক কেন্দ্র হইতে স্পর্শচিহ্ন ক পর্য্যন্ত অঙ্কিত এপ্রযুক্ত ক বিন্দুস্থ কোণ সমকোণ (৩।১৮)। ঐ কারণে খ,গ,ঘ, বিন্দুস্থ কোণও প্রত্যেকে সমকোণ। অপর কউখ এবং উখছ প্রত্যেকে সমকোণ হওয়াতে ছজ কগ সরল রেখা সমানান্তরাল (১।২৮) এবং ঐ কারণে কগ চট রেখাও পরস্পর সমানান্তরাল। তদ্রূপ ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চছ টজ প্রত্যেকে খউঘ সরল রেখার সমানান্তরাল অতএব ছট, ছগ, কট, চখ, খট এই সকল সমানান্তরাল ক্ষেত্র সুতরাং চছ সরল রেখা জট সমান এবং ছজ চট সমান (১।৩৪)। অপর জগ সরল রেখা খঘ সমান এবং ছজ ও চট সহিতও সমান আর খঘ সরল রেখা চছ জট সমান একারণ ছজ চট প্রত্যেকে চছ অথবা জট সমান অতএব চছজট চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমবাহুক। তাহা সমকোণিও বটে কেননা ছখউক সমানান্তরাল ক্ষেত্র হওয়াতে এবং কউখ সমকোণ হওয়াতে কছখ কোণও সমকোণ (১।৩৪)। ঐরূপে ট, জ, চ, বিন্দুস্থ কোণও সমকোণ উপপন্ন হইতে পারে সুতরাং চছজট চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমকোণি, পূর্ব্বে তাহা সমবাহুকও উপপন্ন হইয়াছে অতএব তাহা সম চতুর্ভুজ এবং কখগঘ বৃত্তোপরি অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

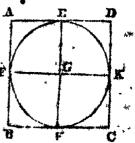
সং উ.। ক চিহ্নস্থ < সম < (৩।১৮) তথা খ, গ, ঘ, চিহ্নস্থ <। ∴ ছজ ॥ কগ (১।২৮) তদ্রূপ কগ ॥ চট এবং ছচ জট

Now AC = BD = GH = FK = GF = HK ∴ Fig. FGHK is equilateral. Again ∵ GBEA is a ▭, and AEB a right < ∴ AGB is a right < Similarly <s at H, K, F are right <s ∴ FGHK is rectangular ∴ it is a □.

PROP. VIII. PROB.

To inscribe a circle in a given square.

Let ABCD be the given square; it is required to inscribe a circle in ABCD.

Bisect (10. 1.) each of the sides AB, AD, in the points F, E, and through E draw (31. 1.) EH parallel to AB or DC, and through F draw FK parallel to AD or BC; therefore each of the figures AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD is a parallelogram, and their opposite sides are equal (34. 1.) and because AD is equal to AB, and AE is the half of AD, and AF the half of AB, AE is equal to AF; wherefore the sides opposite to these are equal, viz. FG to GE; in the same manner, it may be demonstrated, that GH, GK are each of them equal to FG or GE; therefore the four straight lines GE, GF, GH, GK, are equal to one another; and the circle described from the centre G, at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other three; and will also touch the straight lines AB, BC, CD, DA, because the angles at the points E, F, H, K are right (29. 1.) angles, and because the straight line which is drawn

প্রত্যেকে ∥ খঙছ ∴ ছট, চগ, কট, চখ, খট প্রত্যেকে ▭ ∴ ছচ = জট ∴ চছজট ক্ষেত্র সম বাহুক। পুনশ্চ ∵ ছখঙক ∟ এবং কঙখ সম ∠ ∴ কছখ সম ∠। তদ্রূপ জ, ট ছ বিন্দুস্থ ∠ সম ∠ ∴ চছজট সম কোণ ∴ তাহা □।

৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ, তন্মধ্যে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবেক।

কখ এবং কঘ বাহুকে চ এবং ঙ বিন্দুতে বিখণ্ড কর (১।১০) এবং ঙ বিন্দু দিয়া ঙজ সরল রেখা কখ অথবা ঘগ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং চ বিন্দু দিয়া চট রেখা কঘ অথবা খগ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান তাহাতে কট,

টখ, কজ, জঘ, কছ, ছগ, খছ, ছঘ প্রত্যেকে সমানান্তরাল ক্ষেত্র হইবে সুতরাং তাহারদের সম্মুখবর্ত্তি বাহুও পরস্পর সমান হইবে (১।৩৪)। অপর কঘ কখ পরস্পর সমান এবং কঙ কঘ রেখার অর্দ্ধ ও কচ কখ রেখার অর্দ্ধ সুতরাং কঙ কচ পরস্পর সমান এবং তাহারদের সম্মুখস্থ বাহুও পরস্পর সমান একারণ ছঙ চছ পরস্পর সমান। ঐরূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে ছজ ছট প্রত্যেকে চছ অথবা ছঙ সমান অতএব ছঙ ছচ ছট ছজ এই চারি সরল রেখা পরস্পর সমান এবং ছ কেন্দ্র হইতে ঐ চারি রেখার কোন একটীর পরিমাণ পর্য্যন্ত দূরে বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সে বৃত্ত সমুদয় চারি রেখার অগ্রে সংলগ্ন

from the extremity of a diameter, at right angles to it, touches the circle (Cor. 16. 3.); therefore each of the straight lines AB, BC, CD, DA touches the circle which is therefore inscribed in the square ABCD. *Which was to be done.*

Sym. Dem. Figs. AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD each a ▱ ∴ their opposite sides are equal and ∵ AD = AB (Hyp.), and AE = ½AD and AF = ½AB ∴ AE = AF ∴ FG = GE. Similarly GH, GK each = FG, GE ∴ GE = GF = GH = GK and the ⊙ described from G at the distance GE will pass through E, F, H, K and touch AB, BC, CD, DA (16.3) ∵ <s at E, F, H, K are right <s (29.1).

PROP. IX. PROB.

To describe a circle about a given square.

Let ABCD be the given square; it is required to describe a circle about it.

Join AC, BD, cutting one another in E; and because DA is equal to AB, and AC common to the triangles DAC, BAC, the two sides DA, AC are equal to the two BA, AC, and the base DC is equal to the base BC; wherefore the angle DAC is equal (8. 1.) to the angle BAC, and the angle DAB is bisected by the straight line AC. In the same manner, it may be demonstrated, that the angles ABC, BCD, CDA are severally bisected by the straight lines BD, AC: therefore because the angle DAB is equal to the angle ABC, and the angle EAB is the half of DAB, and EBA the half of ABC; the angle EAB is equal to the angle EBA: and the side EA (6. 1.) to the side EB. In the same manner, it may be demonstrated, that each of the straight lines EC, ED is equal to EA or EB: therefore

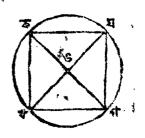
হইবে এবং কখ খগ গঘ ঘক সরল রেখা সকলকেও স্পর্শ করিবেক কেননা ঙ, চ, জ, ট, বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে সম কোণ (১।২৯) এবং ব্যাসাগ্রে ব্যাসের লম্বপাত করিলে তাহা বৃত্ত স্পর্শ করে সুতরাং কখ খগ গঘ ঘক এই চারি সরল রেখা প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে একারণ সে বৃত্ত কখগঘ সম চতুর্ভুজের অন্তর্গত হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং, উ। কট, টখ, কজ, জঘ, কছ, ছগ, খছ, ছঘ ক্ষেত্র প্রত্যেকে □ ∴ তাহারদের সম্মুখস্থ বাহু সমান আর ∵ কঘ = কখ (কল্পনা) এবং কঙ = ½ কঘ এবং কচ = ½ কখ ∴ কঙ = কচ ∴ চছ = ছঙ। তদ্রূপ ছজ, ছট প্রত্যেকে = চছ = ছঙ ∴ ছঙ = ছচ = ছজ = ছট এবং ছ হইতে ছঙ পর্যন্ত ⊙ নিষ্কাসন করিলে তাহা ঙ, চ, জ, ট বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে এবং কখ, খগ, গঘ, ঘক স্পর্শ করিবে (৩।১৬) ∵ ঙ, চ, জ, ট বিন্দুস্থ ∠ সম ∠ (১।২৯)।

৯ প্রতিজ্ঞা সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সম চতুর্ভুজোপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজোপরি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগ খঘ সংযুক্ত কর, ঙ বিন্দুতে তাহারদের সম্পাত হউক। অপর কঘ কখ সমান এবং কগ ঘকগ খকগ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু একারণ ঘক কগ এই দুই বাহু খক কগ দুই বাহুর সমান এবং ঘগ ভূমি খগ ভূমির তুল্য সুতরাং ঘকগ কোণ খকগ কোণের সমান (১।৮) এবং ঘকখ কোণ কগ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল। ঐরূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে

the four straight lines EA, EB, EC, ED are equal to one another; and the circle described from the centre E, at the distance of one of them, must pass through the extremities of the other three, and be described about the square ABCD. *Which was to be done.*

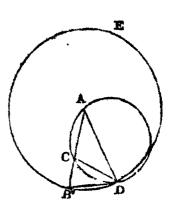
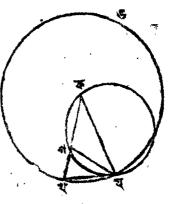
Sym. Dem. DA = AB, DC = BC, AC common to △s ADC, ABC ∴ (8.1) < DAC = < BAC < BAD is bisected by AC. Similarly <s ABC, BCD, CDA are bisected by BD and AC. ∴ < DAB = < ABC, and EAB = ½ DAB and EBA = ½ ABC ∴ < EAB = < EBA ∴ EA = EB (6.1). Similarly EC = ED = EA = EB ∴ the circle described from E at the distance EC, will pass through A, B, C, D.

PROP. X. PROB.

To describe an isosceles triangle, having each of the angles at the base double the third angle.

Take any straight line AB, and divide (11. 2.) it in the point C, so that the rectangle AB. BC may be equal to the square of AC; and from the centre A, at the distance AB, describe the circle BDE, in which place (1. 4.) the straight line BD equal to AC, which is not greater than the diameter of the circle BDE; join DA, DC, and about the triangle ADC describe (5. 4.) the circle ACD; the triangle ABD is such as is required, that is, each of the angles ABD, ADB is double the angle BAD.

Because the rectangle AB. BC is equal to the square

of AC, and AC equal to BD, the rectangle AB. BC is equal to the square of BD: and because, from the point B without the circle ACD, two straight lines BCA, BD are drawn to the circumference, one of which cuts, and the other meets the circle, and the rectangle AB. BC contained by the whole of the cutting line, and the part of it without the circle, is equal to the square of BD which meets it; the straight line BD touches (37. 3.) the circle ACD. And because BD touches the circle, and DC is drawn from the point of contact D, the angle BDC is equal (32. 3.) to the angle DAC in the alternate segment of the circle; to each of these add the angle CDA, then the whole angle BDA is equal to the two angles CDA, DAC: but the exterior angle BCD is equal (32. 1.) to the angles CDA, DAC; therefore also BDA is equal to BCD; but BDA is equal (5. 1.) to CBD, because the side AD is equal to the side AB; therefore CBD, or DBA is equal to BCD; and consequently the three angles BDA, DBA, BCD, are equal to one another. And because the angle DBC is equal to the angle BCD, the side BD is equal (6. 1.) to the side DC; but BD was made equal to CA; therefore also CA is equal to CD, and the angle CDA equal (5. 1.) to the angle DAC; therefore the angles CDA, DAC together are double the angle

ঘক ঘগ সংযুক্ত কর এবং কখগ ত্রিভুজোপরি কগঘ বৃত্ত অঙ্কিত কর (৪।৫)। কখঘ এস্থলে ইষ্ট ত্রিভুজ অর্থাৎ কখঘ, কঘখ প্রত্যেক কোণ খকঘ কোণের দ্বিগুণ।

কখ.খগ আয়ত কগ সমচতুর্ভুজের সমান এবং কগ গঘ সমান একা. রণ কখ.খগ আয়ত গঘ রেখার সম চতুর্ভুজের তুল্য অপর কগঘ বৃত্তের বহিস্থ খ বিন্দু হইতে খগক এবং খঘ দুই সরল রেখা পরিধি পর্যন্ত টানা গিয়াছে তাহার একটা বৃত্তকে ছেদ করে অন্যটা বৃত্তেতে সংলগ্ন মাত্র এবং ছেদক রেখার সমুদয় ও বৃত্তবহিস্থ অংশের আয়ত অর্থাৎ কখ.খগ সংলগ্ন খঘ রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইয়াছে একারণ (৩।৩৭) খঘ সরল রেখা কগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে। অপিচ খঘ রেখা বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং ঘগ রেখা স্পর্শ চিহ্ন ঘ হইতে নিষ্কাশিত হইয়াছে অতএব খঘগ কোণ বৃত্তের অপর পার্শ্বের খণ্ডস্থ ঘকগ কোণের সমান (৩।৩২) এই দুই তুল্য কোণেতে গঘক কোণ যোগ করিলে সমুদয় খঘক কোণ গঘক ঘকগ এই দুই কোণের সমান হইবে কিন্তু বহিস্থ খগঘ কোণ গঘক এবং ঘকগ দুই কোণের তুল্য (১।৩২) সুতরাং খঘক খগঘ সমান। অপর কঘ কখ দুই বাহু সমান হওয়াতে (১।৫) খঘক গখঘ সমান হইতেছে অতএব গখঘ অথবা কখঘ কোণ খগঘ সমান সুতরাং খঘক খখক খগঘ এই তিন কোণ পরস্পর সমান অপর ঘখগ কোণ খগঘ কোণের সমান হওয়াতে খঘ বাহু ও গঘ সমান হইবে (১।৬)। খঘ কগ রেখার তুল্য কৃত হইয়াছে অত.

DAC; but BCD is equal to the angles CDA, DAC (32. 1.); therefore also BCD is double DAC. But BCD is equal to each of the angles BDA, DBA, and therefore each of the angles BDA, DBA is double the angle DAB; wherefore an isosceles triangle ABD is described, having each of the angles at the base double the third angle. *Which was to be done.*

"Cor. 1. The angle BAD is the fifth part of two "right angles. For, since each of the angles ABD "and ADB is equal to twice the angle BAD, they are "together equal to four times BAD, and therefore all "the three angles ABD, ADB, BAD, taken together, "are equal to five times the angle BAD. But the three "angles ABD, ADB, BAD are equal to two right "angles, therefore five times the angle BAD is equal to "two right angles; or BAD is the fifth part of two "right angles.

"Cor. 2. Because BAD is the fifth part of two, or the "tenth part of four right angles, all the angles about "the centre A are together equal to ten times the "angle BAD, and may therefore be divided into ten "parts each equal to BAD. And as these ten equal "angles at the centre must stand on ten equal "arches, therefore the arch BD is one-tenth of the "circumference; and the straight line BD, that is AC, "is therefore equal the side of an equilateral decagon "inscribed in the circle BDE."

Sym. Dem. . ∵ AB.BC = AC² and AC = BD ∴ AB.BC = BD² . ∴ (37.3) BD touches the ⊙ACD, ∴

এব কগ রেখাও গঘ রেখার তুল্য হইবে সুতরাং গঘক কোণ গকঘ সমান (১।৫) অতএব গঘক গকঘ দুই কোণ একত্র যোগে গকঘ কোণের দ্বিগুণ হইবে। পরন্তু খগঘ কোণ গঘক গকঘ এই দুই কোণের তুল্য (১। ৩২) একারণ খগঘ কোণও গকঘ কোণের দ্বিগুণ এবং খগঘ কোণ খঘক ঘখক প্রত্যেকের সমান অতএব খঘক ঘখক প্রত্যেকে ঘকখ কোণের দ্বিগুণ সুতরাং কখঘ এমত এক সমদ্বিবাহুক ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে যাহার ভূমিস্থ দুই কোণ প্রত্যেকে তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ। ইহাই এস্থলে সাধ্য।

১ অনুমান। খকঘ কোণ দুই সমকোণের পঞ্চমাংশ কেননা কখঘ কঘখ প্রত্যেকে খকঘ কোণের দ্বিগুণ হওয়াতে তাহারা একত্র যোগে খকঘ কোণের চতুর্গুণ হইবে এবং কখঘ কঘখ ও খকঘ এই তিন কোণ একত্র যোগে খকঘ কোণের পঞ্চগুণ হইবে। অধিকন্তু কখঘ কঘখ এবং খকঘ এই তিন কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের তুল্য সুতরাং খকঘ কোণ পঞ্চগুণিত হইলে দুই সমকোণের তুল্য হইবে অর্থাৎ খকঘ দুই সম কোণের পঞ্চমাংশ।

২ অনুমান। খকঘ দুই সম কোণের পঞ্চমাংশ অর্থাৎ চারি সম কোণের দশমাংশ হওয়াতে ক কেন্দ্রস্থ সমুদয় কোণ একত্র যোগে খকঘ কোণের দশ গুণ হইবে সুতরাং সেই সকল কোণকে দশ ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগ খকঘ সমান হইবে। অপর কেন্দ্রের এই দশ কোণ অবশ্য দশ সমান২ চাপের উপরিস্থ হইবে অতএব খঘ চাপ পরিধির দশমাংশ উপপন্ন হইল সুতরাং খঘ অথবা কগ সরল রেখা খঘঙ বৃত্তের অন্তর্গত সম বাহু দশভুজ ক্ষেত্রের বাহু তুল্য হইবে।

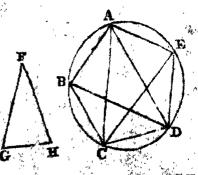
সং উ। ∵ কখ. খগ = কগ২ এবং কগ = খঘ ∴ কখ, খগ = খঘ২ ∴ (৩।৩৭) খঘ কগঘ ⊙ স্পর্শক ∴ ∠ খঘগ = ∠ ঘকগ (৩।৩২) ∴ ∠ খঘক = ∠ ঘকগ + ∠ গঘক।

<BDC = <DAC (32.3) ∴ <BDA = <DAC + <CDA. But < BCD = <CDA + <DAC (32.1) ∴ <BCD = <BDA. But <BDA = <CBD (5. 1) ∴ < CBD or DBA = <BCD = BDA ∴ BD = DC (6.1) ∴ DC = CA ∴ <CDA = <DBC ∴ CDA + <DAC BCD = 2 <DAC ∴ <BDA. or < DBA = 2<DAC.

PROP. XI. PROB.

To inscribe an equilateral and equiangular pentagon in a given circle.

Let ABCDE be the given circle, it is required to inscribe an equilateral and equiangular pentagon in the circle ABCDE.

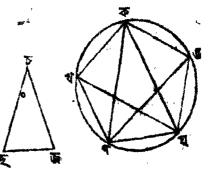
Describe (10. 4.) an isosceles triangle FGH, having each of the angles at G, H, double the angle at F; and in the circle ABCDE inscribe (2. 4) the triangle ACD equiangular to the triangle FGH, so that the angle CAD may be equal to the angle at F, and each of the angles ACD, CDA equal to the angle at G or H; wherefore, each of the angles AOD, CDA is double the angle CAD. Bisect (9. 1.) the angles ACD, CDA by the straight lines CE, DB; and join AB,BC,DE,EA ABCDE is the pentagon required.

খগঘ=খকগ + গখক (১।৩২)। কিন্তু < খঘক = < ঘখক (১।৫) ∴ <ঘখক অর্থাৎ গখক = < খগঘ ∴ খঘ = গঘ (১।৬) ∴ ঘগ = গক ∴ < গঘক = < ঘকগ ∴ < গঘক + ঘকগ = ২<ঘকগ ∴ <খগঘ = ২< ঘকগ ∴ <খঘক অথবা < ঘখক = ২< ঘকখ।

১১ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত তন্মধ্যে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

চছজ এক সম দ্বিবাহুক ত্রিভুজ এবম্প্রকারে অঙ্কিত কর যে ছ এবং জ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে চ বিন্দুস্থ কোণের দ্বিগুণ হয় (৪।১০) কখগঘঙ বৃত্তেতে কগঘ ত্রিভুজ চছজ ত্রিভুজের

তুল্য কোণি করিয়া অন্তর্গত কর (৪।২) যেন ক বিন্দুস্থ কোণ চ বিন্দুস্থ কোণ তুল্য এবং গ ও ঘ বিন্দুস্থ কোণ ক্রমশঃ ছ এবং জ বিন্দুস্থ কোণের তুল্য হয় তাহাতে কগঘ এবং কঘগ প্রত্যেক কোণ গকঘ কোণের দ্বিগুণ হইবে। অপর কগঘ এবং কঘগ দুই কোণকে ক্রমশঃ গঙ এবং ঘখ দুই রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর এবং কখ, খগ, ঘঙ, ঙক সংযুক্ত কর। কখগঘঙ এক্ষণে অভীষ্ট পঞ্চভুজ।

Because the angles ACD, CDA are each of them double CAD, and are bisected by the straight lines CE, DB, the five angles DAC, ACE, ECD, CDB, BDA are equal to one another; but equal angles stand upon equal (26. 3.) arches; therefore the five arches AB, BC, CD, DE, EA are equal to one another: and equal arches are subtended by equal (29. 3.) straight lines; therefore the five straight lines AB, BC, CD, DE, EA are equal to one another. Wherefore the pentagon ABCDE is equilateral. It is also equiangular; because the arch AB is equal to the arch DE; if to each be added BCD, the whole ABCD is equal to the whole EDCB: and the angle AED stands on the arch ABCD, and the angle EAB on the arch EDCB: therefore the angle BAE is equal (27. 3.) to the angle AED: for the same reason, each of the angles ABC, BCD, CDE, is equal to the angle BAE, or AED: therefore the pentagon ABCDE is equiangular; and it has been shewn, that it is equilateral. Wherefore, in the given circle, an equilateral and equiangular pentagon has been inscribed. *Which was to be done.*

Otherwise:

"Divide the radius of the given circle, so that the "rectangle contained by the whole and one of the "parts may be equal to the square of the other "(11. 2.) Apply in the circle, on each side of a "given point, a line equal to the greater of these parts; "then (2. Cor.) each of the arches cut off will be one "tenth of the circumference, and therefore the arch "made up of both will be one fifth of the circum"ference; and if the straight line subtending this "arch be drawn, it will be the side of an equilate"ral pentagon inscribed in the circle."

কগঘ কঘগ প্রত্যেকে গকঘ কোণের দ্বিগুণ এবং ক্রমশ গঙ ঘখ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত একারণ গকঘ, কগঙ, ঙগঘ, গঘখ, খঘক এই পঞ্চ কোণ পরস্পর সমান। অধিকন্তু বৃত্তের মধ্যে সমানং কোণ সমানং চাপোপরি থাকে (৩.২৬) অতএব কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক, এই পঞ্চ চাপ পরস্পর সমান। অপিচ সমানং চাপ সমানং সরল রেখার সম্মুখস্থ থাকে (৩।২৯) একারণ কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক, এই পঞ্চ রেখা পরস্পর সমান সুতরাং কখগঘঙ পঞ্চ ভুজ সমবাহুক। অপর তাহা সমান কোণিও বটে কেননা কখ চাপ ঘঙ চাপের সমান হওয়াতে তাহারদের প্রত্যেকে খগঘ চাপ যোগ করিলে কখগঘ চাপ খগঘঙ চাপ তুল্য হইবে এবং কঙঘ কোণ কখগঘ চাপোপরিস্থ ও খকঙ কোণ খগঘঙ চাপোপরিস্থ হওয়াতে কঙঘ কোণ খকঙ তুল্য (৩।২৭) তদ্রূপ কখগ খগঘ গঘঙ কোণ প্রত্যেকে খকঙ অথবা কঙঘ কোণের সমান উপপন্ন হইবে। সুতরাং কখগঘঙ পঞ্চভুজ সমান কোণি এবং তাহা সমবাহুক পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে অতএব নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহুক ও সমান কোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

প্রকারান্তর

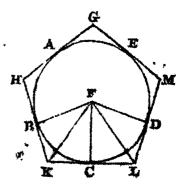
নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কর্কটকে এমত রূপে বিভাগ কর যে সমুদয় এবং একাংশের আয়ত দ্বিতীয়াংশের সমচতুর্ভুজ তুল্য হয় (২।১১) পরে এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর প্রত্যেক দিকে ঐ বৃহত্তর সরল রেখার সদৃশ রেখা বৃত্তেতে স্থাপিত কর তাহাতে যে দুই চাপ ছিন্ন হইবে তাহারা প্রত্যেকে পরিধির দশমাংশ তুল্য হইবে (৪।১০ দ্বিতীয় অনুমান) সুতরাং ঐ দুই চাপ একত্র যোগে পরিধির পঞ্চমাংশ হইবে এবং সে চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখা নিষ্কাশন করিলে তাহা বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক পঞ্চভুজের বাহু হইবে।

Sym. Dem. ∵ ∠s ACD, CDA are bisected by CE and DB, and each of them = 2 CAD ∴ ∠ DAC = ACE = ECD = CDB = BDA ∴ arc CD = arc AE = arc ED = arc BC = arc AB (26. 3) ∴ CD = AE = ED = BC = AB (29. 3) ∴ Pentag. ABCDE is equilateral. Again arc AB = arc DE ∴ arc AB + arc BCD i. e. the arc ABCD = arc DE + arc BCD i. e. the arc BCDE ∴ ∠ AED = ∠ BAE (27. 3) similarly ∠ ABC = BCD = CDE = AED = BAE ∴ Pentag. ABCDE is equiangular.

PROP. XII. PROB.

To describe an equilateral and equiangular pentagon about a given circle

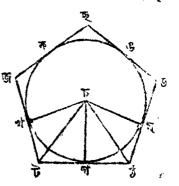
Let ABCDE be the given circle, it is required to describe an equilateral and equiangular pentagon about the circle ABCDE.

Let the angles of a pentagon, inscribed in the circle, by the last proposition, be in the points A, B, C, D, E, so that the arches AB, BC, CD, DE, EA are equal (11. 4), and through the points A, B, C, D, E draw GH, HK, KL, LM, MG, touching (17. 3.) the circle ; take the centre F, and join FB, FK, FC, FL, FD. And because the straight line KL touches the circle ABCDE in the point C, to which FC is drawn from the centre F, FC is perpendicular (18. 3.) to KL; therefore each of the angles at C is a right angle; for the same reason, the angles at the points B, D are right angles; and

সং উ,। ∵ ∠কগঘ এবং গঘক গঙ ও ঘখ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত এবং প্রত্যেকে = ২ গকঘ ∴ ∠ঘকগ = কগঙ = ঙগঘ = গঘখ = খঘক ∴ চাপ গঘ = চাপ কঙ = চাপ ঙঘ = চাপ খগ = চাপ কখ (৩।২৬) ∴ গঘ = কঙ = ঙঘ = খগ = কখ (৩।২৯) ∴ পঞ্চভুজ কখগঘঙ সমবাহুক। অধিকন্তু চাপ কখ = চাপ ঘঙ ∴ চাপ কখ + চাপ খগঘ অর্থাৎ চাপ কখগঘ = চাপ ঘঙ + চাপ খগঘ অর্থাৎ চাপ খগঘঙ ∴ ∠কঙঘ = ∠খকঙ (৩।২৭) তদ্রূপ ∠কখগ = খগঘ = গঘঙ = কঙঘ = খকঙ ∴ পঞ্চভুজ কখগঘঙ সমান কোণি।

১২ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট বৃত্তোপরি সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, তাহার উপর সম বাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ধারানুসারে বৃত্তান্তর্গত পঞ্চভুজ কল্পনা কর ক, খ, গ, ঘ, ঙ সেই ক্ষেত্রের কোণ চিহ্ন হউক তাহাতে কখ, খগ-গঘ, ঘঙ, ঙক এই পঞ্চ চাপ পরস্পর সমান হইবে (৪।১১) অনন্তর ক, খ, গ, ঘ, ঙ বিন্দু দিয়া ছজ, জট, টঠ, ঠড, ডছ, বৃত্ত স্পর্শক রেখা টান (৩।১৭) এবং চ কেন্দ্র নির্দ্দেশ করিয়া চখ চট চগ চঠ চঘ সংযুক্ত কর। টঠ বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং কেন্দ্র হইতে গ স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত চগ সরল রেখা নিষ্কাসিত হইয়াছে একারণ (৩।১৮) চগ রেখা টঠ রেখার লম্ব সুতরাং গ বিন্দুস্থ

because FCK is a right angle the square of FK is equal (47. 1.) to the squares of FC, CK. For the same reason, the square of FK is equal to the squares of FB, BK: therefore the squares of FC, CK, are equal to the squares of FB, BK, of which the square of FC is equal to the square of FB; the remaining square of CK is therefore equal to the remaining square of BK, and the straight line CK equal to BK: and because FB is equal to FC and FK common to the triangles BFK CFK, the two BF, FK are equal to the two CF, FK; and the base BK is equal to the base KC; therefore the angle BFK is equal (8. 1) to the angle KFC, and the angle BKF to FKC: wherefore the angle BFC is double the angle KFC, and BKC double FKC: for the same reason, the angle CFD is double the angle CFL, and CLD double CLF: and because the arch BC is equal to the arch CD, the angle BFC is equal (27. 3.) to the angle CFD; and BFC is double the angle KFC, and CFD double CFL; therefore the angle KFC is equal to the angle CFL: now the right angle FCK is equal to the right angle FCL: and therefore in the two triangles FKC, FLC, there are two angles of the one equal to two angles of the other, each to each, and the side FC, which is adjacent to the equal angles in each, is common to both; therefore the other sides are equal (26. 1.) to the other sides, and the third angle to the third angle: therefore the straight line KC is equal to CL, and the angle FKC to the angle FLC: and because KC is equal to CL, KL is double KC: in the same manner, it may be shewn, that HK is double BK: and because BK is equal to KC, as was demonstrated, and KL is double KC, and HK double BK, HK is equal to KL: in like manner, it may be shewn, that GH, GM, ML are each of them equal to HK or KL: therefore the pentagon GHKLM is equilateral. It is also equiangular; for, since the angle FKC is equal to the angle FLC, and

প্রত্যেক কোণ সমকোণ। ঐ কারণ বশতঃ খ এবং ঘ বিন্দুস্থ কোণও প্রত্যেকে সমকোণ। অপর চগট সমকোণ, একারণ চট রেখার সমচতুর্ভুজ টগ গচ দুই রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় তুল্য (১।৪৭)। ঐ কারণ বশতঃ চট রেখার সমচতুর্ভুজ চখ খট দুই রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় তুল্য। অতএব টগ গচ দুই রেখার সম চতুর্ভুজদ্বয় চখ খট দুই রেখার সমচতুর্ভুজ দ্বয় সমান, তাহার মধ্যে চখ গচ দুই রেখার সম চতুর্ভুজ পরস্পর সমান সুতরাং অবশিষ্ট খট এবং টগ দুই রেখার সমচতুর্ভুজও পরস্পর সমান অতএব খট টগ রেখাও পরস্পর সমান। অপর খচ গচ পরস্পর সমান এবং চট খচট এবং গচট ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে খচ চট দুই বাহু ক্রমশঃ গচ চট দুই বাহুর সমান এবং খট ভূমিও টগ ভূমির তুল্য অতএব (১।৮) খচট কোণ গচট কোণের এবং খটচ কোণ গটচ কোণের সমান সুতরাং খচগ কোণ টচগ কোণের এবং খটগ কোণ চটগ কোণের দ্বিগুণ। তদ্রূপ গচঘ কোণ গচঠ কোণের এবং গঠঘ কোণ গঠচ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইবে। অপর খগ চাপ গঘ চাপের সমান তন্নিমিত্ত খচগ কোণ গচঘ কোণের তুল্য (৩।২৭)। অপিচ খচগ কোণ টচগ কোণের এবং গচঘ কোণ গচঠ কোণের দ্বিগুণ সুতরাং টচগ কোণ গচঠ কোণ তুল্য। অধিকন্তু চগট সম কোণ চগঠ সমকোণের সমান অতএব চটগ চঠগ দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটীর দুই কোণের সমান এবং সমান২ কোণ সংলগ্ন গচ রেখা দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু একারণ (১।২৬) অন্যান্য বাহুও ক্রমশঃ পরস্পর সমান এবং অবশিষ্ট কোণও সমান অতএব টগ রেখা গঠ রেখার তুল্য এবং চটগ কোণ চঠগ কোণের তুল্য। অপর টগ ঠগ সমান হওয়াতে টঠ রেখা টগ রেখার দ্বিগুণ। ঐ রূপে ইহাও উপপন্ন হইবে যে জট রেখা জখ রেখার দ্বিগুণ আর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে খট টগ সমান অতএব টঠ রেখা টগ রেখার এবং

the angle HKL double the angle FKC, and KLM double FLC, as was before demonstrated, the angle HKL is equal to KLM: and, in like manner, it may be shewn, that each of the angles KHG, HGM, GML is equal to the angle HKL or KLM, therefore the five angles GHK, HKL, KLM, LMG, MGH, being equal to one another, the pentagon GHKLM is equiangular: and it is equilateral, as was demonstrated; and it is described about the circle ABCDE. *Which was to be done.*

Sym. Dem. ∵ FC ⊥ KL (18. 3.) ∴ <s at C are rt. <s, so are <s at B and D rt. <s ∴ $FK^2 = FC^2 + CK^2$ (47. 1.) Similarly $FK^2 = FB^2 + BK^2$ ∴ $FC^2 + CK^2 = FB^2 + BK^2$ but $FC^2 = FB^2$ ∴ $CK^2 = BK^2$ ∴ CK = BK. ∵ FB = FC and FK common to △s BFK, CFK, and BK = KC ∴ (8. 1.) < BFK = < KFC and < BKF = < CKF ∴ < BFC = 2< KFC and < BKC = 2 FKC. Similarly < CFD = 2 < CFL and < CLD = 2 < CLF. Again ∵ arc BC = arc CD, < BFC = < CFD (27. 3.) Now BFC = 2 KFC, and CFD = 2CFL ∴ KFC = CFL, and ∵ FCK = FCL and FC common to △s FKC and FLC ∴ (26. 1.) < FKC = < FLC and KC = CL ∴ KL = 2 KC. Similarly HK = 2 BK. Now ∵ BK = KC, HK = KL. So GH, GM, ML each = HK = KL ∴ Pentag. GHKLM is equilateral. Further ∵ < FKC = < FLC and HKL = 2 FKC and KLM = 2 FLC ∴ HKL = KLM.

জট রেখা খট রেখার দ্বিগুণ হওয়াতে জট টঠ পরস্পর সমান। ঐ রূপে সপ্রমাণ করা যায় যে ছজ, ছড, ডঠ, প্রত্যেকে জট অথবা টঠ সমান অতএব ছজটঠড পঞ্চভুজ সমবাহুক উপপন্ন হইল। অপর তাহা সমান কোণিও বটে কেননা চটগ কোণ চঠগ কোণের সমান হওয়াতে এবং জটঠ কোণ চটগ কোণের ও টঠড কোণ চঠগ কোণের দ্বিগুণ হওয়াতে জটঠ কোণ টঠড কোণের সমান তদ্রূপ টজছ, জছড, ছডঠ প্রত্যেকে জটঠ অথবা টঠড কোণের সমান উপপন্ন হইবে। অতএব ছজট, জটঠ, টঠড ঠডছ, ডছজ এই পঞ্চ কোণ পরস্পর সমান হওয়াতে ছজটঠড পঞ্চভুজ সমান কোণি সপ্রমাণ হইল। পূর্ব্বে তাহা সমবাহুক উপপন্ন হইয়াছে এবং কখগঘঙ বৃত্তোপরিও অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

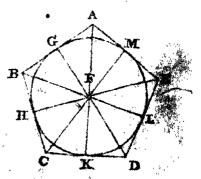
সং উ,। ∵ চগ ⊥ টঠ (৩।১৮) ∴ গ বিন্দুস্থ < সম <. তথা খ এবং ঘ বিন্দুস্থ < সম < ∴ চট^{২} = চগ^{২} + গট^{২} (১।৪৭)। তদ্রূপ চট^{২} = চখ^{২} + খট^{২} ∴ চগ^{২} + গট^{২} = চখ^{২} + খট^{২}। পরন্তু চগ^{২} = চখ^{২} ∴ গট^{২} = খট^{২} ∴ গট = খট। ∵ চখ = চগ এবং চট খচট ও গচট ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং খট = টগ ∴ (১।৮) < খচট = < টচগ এবং < খটচ = গটচ ∴ < খচগ = ২ < টচগ এবং < খটগ = ২ চটগ। তদ্রূপ < গচঘ = ২ < গচঠ এবং < গঠঘ = ২ < গঠচ। পুনশ্চ ∵ চাপ খগ = চাপ গঘ, < খচগ = < গচঘ (৩।২৭) অপর খচগ = ২ টচগ এবং গচঘ = ২ গচঠ ∴ টচগ = গচঠ এবং ∵ চগট = চগঠ এবং চগ চটগ ও চঠগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু ∴ (১।২৬) < চঠগ = চটগ ও টগ = গঠ ∴ টঠ = ২ টগ। তদ্রূপ জট = ২ খট। অপর ∵ খট = টগ, ∴ জট = টঠ। তথা ছজ, ছড, ডঠ প্রত্যেকে = জট = টঠ ∴ পঞ্চভুজ ছজটঠড সমবাহুক। অপিচ ∵ < চটগ = চঠগ, এবং জটঠ

So <s KHG, HGM, GML each = HKL = KLM ∴ Pentag. GHKLM is equiangular.

PROP. XIII. PROB.

To inscribe a circle in a given equilateral and equiangular pentagon.

Let ABCDE be the given equilateral and equiangular pentagon; it is required to inscribe a circle in the pentagon ABCDE.

Bisect (9. 1.) the angles BCD, CDE by the straight lines CF, DF, and from the point F, in which they meet, draw the straight lines FB, FA, FE: therefore, since BC is equal to CD, and CF common to the triangles BCF, DCF, the two sides BC, CF are equal to the two DC, CF; and the angle BCF is equal to the angle DCF; therefore the base BF is equal (4. 1.) to the base FD, and the other angles to the other angles, to which the equal sides are opposite; therefore the angle CBF is equal to the angle CDF: and because the angle CDE is double CDF, and CDE equal to CBA, and CDF to CBF; CBA is also double the angle CBF; therefore the angle ABF is equal to the angle CBF; wherefore the angle ABC is bisected by the straight line BF; in the same manner, it may be demonstrated, that the angles BAE, AED, are bisected by the straight lines AF, EF: from the point F draw (12. 1.)

FG, FH, FK, FL, FM perpendiculars to the straight lines AB, BC, CD, DE, EA: and because the angle HCF is equal to KCF, and the right angle FHC equal to the right angle FKC, in the triangles FHC, FKC two angles of the one are equal to two angles of the

=২ চটগ, ও টঠড=২ চঠগ.·.জটঠ=টঠড । তদ্রূপ টজছ, জছড, ছডঠ প্রত্যেকে=জটঠ=টঠড.·.পঞ্চভুজ ছজটঠড সমান কোণি।

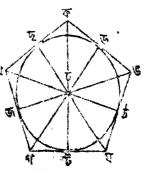
---

১৩ প্রতিজ্ঞা । সম্পাদ্য ।

নির্দ্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমানকোণি পঞ্চভুজে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ তাহাতে এক বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

খগঘ এবং গঘঙ কোণ ক্রমশঃ গচ ঘচ রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ড কর এবং ঐ দুই রেখার সম্পাত চিহ্ন চ হইতে চখ, চক, চঙ, রেখা নিষ্কাসন কর। খগ গঘ সমান এবং গচ খগচ

খগচ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে খগ গচ ঘগ গচ সমান হইবে এবং খগচ কোণ ঘগচ কোণের তুল্য অতএব খচ ভূমি চঘ ভূমির সমান (১।৪) এবং সমানং বাহুর সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও ক্রমশঃ সমান সুতরাং গখচ কোণ গঘচ কোণের সমান। অপর গঘঙ কোণ গঘচ কোণের দ্বিগুণ এবং গঘঙ গখক কোণের ও গঘচ গখচ কোণের সমান হওয়াতে গখক কোণও গখচ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইল অতএব কখচ কোণ গখচ কোণের সমান সুতরাং কখগ কোণ খচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। তদ্রূপ খকঙ কঙঘ দুই কোণ ক্রমশঃ কচ ঙচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত সপ্রমাণ হইবে। অনন্তর চ বিন্দু হইতে চছ চজ চট চঠ চড রেখা কখ খগ গঘ ঘঙ ঙক রেখার লম্ব করিয়া নিষ্কাসন কর (১।১২)

other, and the side FC, which is opposite to one of the equal angles in each, is common to both; therefore, the other sides are equal (26. 1.), each to each; that is, the perpendicular FH is equal to the perpendicular FK. In the same manner it may be demonstrated, that FL, FM, FG are each of them equal to FH or FK: therefore the five straight lines FG, FH, FK, FL, FM are equal to one another; wherefore the circle described from the centre F, at the distance of one of these five, will pass through the extremities of the other four, and touch the straight lines AB, BC, CD, DE, EA, because the angles at the points G, H, K, L, M are right angles, and a straight line drawn from the extremity of the diameter of a circle at right angles to it touches (Cor. 16. 3.) the circle: therefore each of the straight lines AB, BC, CD, DE, EA touches the circle; wherefore the circle is inscribed in the pentagon ABCDE.

Which was to be done.

Sym. Dem. ∵ BC = CD, and FC common to △s BFC, DFC and < BCF = DCF ∴ BF = FD, and < CBF = < CDF. Again ∵ < CDE = 2 CDF and CDE = CBA and CDF = CBF ∴ CBA = 2 CBF ∴ ABF = CBF ∴ < ABC is bisected by BF. Similarly <s BAE, AED are bisected by AF, EF. Now < HCF = KCF and < FHC = < FKC and FC common to △s HFC, KFC ∴ (26. 1.) FH = FK. Similarly FL, FM, FG each = FH = FK ∴ the ⊙ described from F at the distance FH will pass through H, K, L, M, G and touch AB, BC, CD, DE, EA (Cor. 16. 3.) ∵ the <s at G, H, K, L, M, are <s.

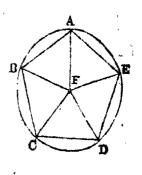
জগচ কোণ টগচ কোণের তুল্য এবং চজগ সমকোণ চটগ সম কোণের সমান একারণ চজগ চটগ দুই ত্রিভুজের মধ্যে এক টার দুই কোণ ক্রমশঃ অন্যটীর দুই কোণের তুল্য এবং প্রত্যেকের সমানের কোণের সম্মুখস্থ চগ বাহু দুই ত্রিভুজের সামান্য কর্ণ অতএব অন্যান্য বাহুও ক্রমশঃ পরস্পর সমান (১।২৬। অর্থাৎ চজ লম্ব চট লম্বের সমান। তদ্রূপ চঠ চড চছ প্রত্যেকে চজ অথবা চট সমান উপপন্ন হইবে সুতরাং চছ চজ চট চঠ চড এই পাঁচ সরল রেখা পরস্পর সমান। অতএব চ কেন্দ্র হইতে ঐ পাঁচ রেখার কোন রেখার পরিমাণ দূরে বৃত্ত নিষ্কাসন করিলে তাহা সমুদয় পঞ্চ রেখার অগ্রে সংলগ্ন হইয়া কখ খগ গঘ ঘঙ ঙক এই পাঁচ সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে কেননা ছ জ ট ঠ ড বিন্দুস্থ কোণ সম কোণ এবং বৃত্ত ব্যাসের অগ্র হইতে ব্যাসের লম্বপাত করিলে তাহা বৃত্ত স্পর্শ করে (৩।১৬ অনুমান) সুতরাং কখ খগ গঘ ঘঙ ঙক প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং কখগঘঙ পঞ্চ ভুজ ক্ষেত্রে বৃত্ত অন্তর্গত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ,। ∵ খগ=গঘ, এবং চগ খচগ ঘচগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং ∠খগচ=ঘগচ ∴ খচ=চঘ এবং গ∠খচ= ∠গঘচ। পুনশ্চ ∵ ∠গঘঙ=২গঘচ এবং গঘঙ=গখক ও গঘচ=গখচ ∴ গখক=২গখচ ∴ কখচ=গখচ ∴ ∠কখগ খচ বাহু দ্বারা দ্বিখণ্ডিত। তদ্রূপ খকঙ কঙঘ, কচ ঙচ দ্বারা ক্রমশঃ দ্বিখণ্ডিত। অপর ∠জগচ=টগচ এবং ∠চজগ=∠চটগ এবং চগ জচগ টচগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু ∴ (১।২৬) চজ=চট। তদ্রূপ চঠ, চড, চছ প্রত্যেকে=চজ=চট ∴ চ কেন্দ্র হইতে চজ পর্য্যন্ত অঙ্কিত ⊙ জ, ট, ঠ, ড, ছ দিয়া যাইবে এবং কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক স্পর্শ করিবে (৩।১৬ অনু) ∵ ছ, জ, ট, ঠ, ড কোণ সম ∠।

PROP. XIV. PROB.

To describe a circle about a given equilateral and equiangular Pentagon.

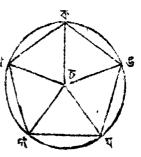
Let ABCDE be the given equilateral and equiangular pentagon; it is required to describe a circle about it.

Bisect (9. 1.) the angles BCD, CDE by the straight lines CF, FD, and from the point F, in which they meet, draw the straight lines FB, FA, FE to the points B, A, E. It may be demonstrated, in the same manner as in the preceding proposition, that the angles CBA, BAE, AED are bisected by the straight lines FB, FA, FE: and because the angle BCD is equal to the angle CDE, and FCD is the half of the angle BCD, and CDF the half of CDE; the angle FCD is equal to FDC; wherefore the side CF is equal (6. 1.) to the side FD: In like manner, it may be demonstrated, that FB, FA, FE are each of them equal to FC or FD: therefore the five straight lines, FA, FB, FC, FD, FE are equal to one another; and the circle described from the centre F, at the distance of one of them, will pass through the extremities of the other four, and be described about the equilateral and equiangular pentagon ABCDE. *Which was to be done.*

Sym. Dem. It may be shown as in the preceding proposition that <s CBA, BAE, AED are bisected by FB, FA, FE. Now ∵ <BCD = < CDE and FCD = ½ BCD and CDF = ½ CDE ∴ <FCD = < FDC ∴ CF = FD (6. 1). Similarly FB, FA, FE each =

১৪ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চ ভুজ ক্ষেত্রোপরি-বৃত্ত নিষ্কাস্য করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজ তাহার উপর এক বৃত্ত নিষ্কাস্য করিতে হইবে।

খগঘ গঘঙ দুই কোণ ক্রমশঃ গচ ঘচ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কর এবং তাহারদের সম্পাত চিহ্ন চ হইতে চখ, চক, চঙ, রেখা খ, ক, ঙ, পর্য্যন্ত টান। পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ধারানুসারে উপপন্ন করা যায় যে গখক খকঙ কঙঘ কোণ সকল ক্রমশঃ চখ চক চঙ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অপর খগঘ কোণ গঘঙ কোণের সমান এবং চগঘ কোণ খগঘ কোণের অর্দ্ধ, আর গঘচ কোণ গঘঙ কোণের অর্দ্ধ অতএব চগঘ কোণ গঘচ কোণের সমান সুতরাং চঘ বাহু চগ বাহুর তুল্য (১।৬) তদ্রূপ চখ চক চঙ প্রত্যেকে চগ অথবা চঘ রেখার তুল্য উপপন্ন হইবে সুতরাং চক চখ চগ চঘ চঙ এই পঞ্চ সরল রেখা পরস্পর সমান এবং চ কেন্দ্র হইতে তাহারদের কোনটার পরিমাণ দূরে বৃত্ত অঙ্কিত করিলে তাহা সমুদয় পঞ্চ রেখার অগ্রে সংলগ্ন হইয়া কখগঘঙ সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চ ভুজোপরি নিষ্কাসিত হইবে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ,। পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় উপপন্ন হইতে পারে যে গখক, খকঙ, কঙঘ ক্রমশঃ চখ, চক, চঙ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত, অপর ∵ ∠খগঘ = ∠গঘঙ এবং চগঘ = ½ খগঘ এবং গঘচ = ½ গঘঙ ∴ ∠চগঘ = ∠চঘগ ∴ গচ = চঘ (১।৬) তদ্রূপ চখ

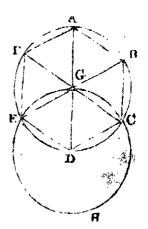
CF = FD ∴ the ⊙ described from F at the distance FC will pass through A, B, C, D, E.

PROP. XV. PROB.

To inscribe an equilateral and equiangular hexagon in a given circle.

Let ABCDEF be the given circle; it is required to inscribe an equilateral and equiangular hexagon in it.

Find the centre G of the circle ABCDEF, and draw the diameter AGD; and from D as a centre, at the distance DG, describe the circle EGCH, join EG, CG, and produce them to the points B, F; and join AB, BC, CD, DE, EF, FA: the hexagon ABCDEF is equilateral and equiangular.

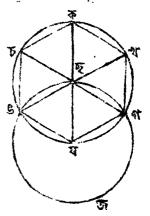
Because G is the centre of the circle ABCDEF, GE is equal to GD: and because D is the centre of the circle EGCH, DE is equal to DG; wherefore GE is equal to ED, and the triangle EGD is equilateral; and therefore its three angles EGD, GDE, DEG, are equal to one another (Cor 5. 1.): and the three angles of a triangle are equal (32. 1.) to two right angles; therefore the angle EGD is the third part of two right angles: in the same manner, it may be demonstrated, that the angle DGC is also the third part of two right

angles: and because the straight line GC makes with EB the adjacent angles EGC, CGB equal (13. 1.) to two right angles: the remaining angle CGB is the third part of two right angles: therefore the angles EGD, DGC, CGB, are equal to one another: and also the angles vertical to them, BGA, AGF, FGE

চক, চঙ, প্রত্যেকে = গচ = চঘ ∴ চ কেন্দ্র হইতে চগ পর্য্যন্ত অঙ্কিতে ক, খ, গ, ঘ, ঙ দিয়া যাইবে।

১৫ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহুক এবং সমান কোণি ষড়্ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙচ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, উহাতে এক সমবাহুক এবং সমান কোণি ষড়্ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙচ বৃত্তের ছ কেন্দ্র নির্দ্দেশ করিয়া কছঘ ব্যাস অঙ্কিত কর পরে ঘ কেন্দ্র হইতে ঘছ দূরে ছঙজগ বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং ঙছ গছ সংযুক্ত করিয়া তাহারদিগকে খ এবং চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর আর কখ খগ গঘ ঘঙ ঙচ চক সংযুক্ত কর। তাহাতে কখগঘঙচ ষড়্ভুজ সম বাহুক এবং সমানকোণি হইবে।

ছ বিন্দু কখগঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র একারণ ছঙ ছঘ সমান এবং ঘ বিন্দু ছঙজগ বৃত্তের কেন্দ্র একারণ ঘঙ ছঘ সমান অতএব ছঙ ঙঘ সমান এবং ঙছঘ ত্রিভুজ সমবাহুক উৎপন্ন হইল তন্নিমিত্তে ঐ ত্রিভুজস্থ তিন কোণ ঙছঘ ছঘঙ ঘঙছ পরস্পর সমান (১।৫ অনুমান)। অপর ত্রিভুজস্থ তিন কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণ তুল্য হয় (১।৩২) অতএব ঙছঘ দুই সমকোণের তৃতীয়াংশ। তদ্রূপ ঘছগ কোণ দুই সমকোণের তৃতীয়াংশ উৎপন্ন হইবে। অপর ঙখ রেখোপরি ছগ রেখার সম্পাতে উভয় পার্শ্বস্থ দুই কোণ ঙছগ এবং গছখ একত্র যোগে দুই সম কোণ তুল্য (১।১৩)। একারণ

(15. 1.); therefore the six angles EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE are equal to one another. But equal angles at the centre stand upon equal (26. 3.) arches; therefore the six arches AB, BC, CD, DE, EF, FA are equal to one another; and equal arches are subtended by equal (29. 3.) straight lines; therefore the six straight lines are equal to one another, and the hexagon ABCDEF is equailateral. It is also equiangular; for, since the arch AF is equal to ED, to each of these add the arch ABCD; therefore the whole arch FABCD shall be equal to the EDCBA: and the angle FED stands upon the arch FABCD, and the angle AFE upon EDCBA; therefore the angle AFE is equal to FED: in the same manner it may be demonstrated, that the other angles of the hexagon ABCDEF are each of them equal to the angle AFE or FED; therefore the hexagon is equiangular; it is also equilateral, as was shewn: and it is inscribed in the given circle ABCDEF. *Which was to be done.*

COR. From this it is manifest, that the side of the hexagon is equal to the straight line from the centre, that is, to the radius of the circle.

And if through the points A, B, C, D, E, F, there be drawn straight lines touching the circle, an equilateral and equiangular hexagon shall be described about it, which may be demonstrated from what has been said of the pentagon: and likewise a circle may be inscribed in a given equilateral and equiangular hexagon, and circumscribed about it, by a method like to that used for the pentagon.

Sym. Dem. GE = GD and DE = DG ∴ GE = DE ∴ △ EGD is equilateral ∴ < EGD = GDE = DEG (Cor. 5. 1) ∴ EGD = ⅓ of 2 rt. <s (32. 1.) Similarly DGC = ⅓ of 2 rt. <s ∴ < CGB = ⅓ of 2 rt. <s (13. 1.) ∴ < EGD = DGC = CGB = (15. 1.) BGA = AGF = FGE ∴ the arcs AB, BC, CD, DE, EF, FA are equal to one

অবশিষ্ট গহুখ কোণও দুই সমকোণের তৃতীয়াংশ অতএব ঙছঘ ঘছগ এবং গছখ এই তিন কোণ পরস্পর সমান এবং তাহারদের সম্মুখস্থ কছখ কছচ চছঙ কোণও তত্তুল্য (১।১৫) সুতরাং ঙছঘ ঘছগ গছখ খছক কছচ চছঙ এই ছয় কোণ পরস্পর সমান। অধিকন্তু কেন্দ্রস্থ সমান২ কোণ সমান২ চাপের উপর থাকে (৩।২৬) অতএব কখ খগ গঘ ঘঙ ঙচ চক এই ছয় চাপ পরস্পর সমান এবং সমান২ চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখাও সমান হওয়াতে (৩।২৯) কখ প্রভৃতি ছয় সরল রেখা পরস্পর সমান সুতরাং কখগঘঙচ ষড়্ভুজ সম বাহুক উপপন্ন হইল। অপর তাহা সমান কোণিও বটে কেননা কচ ঙঘ দুই চাপ সমান হওয়াতে তাহারদের প্রত্যেকে কখগঘ চাপ যোগ করিলে সমুদয় চকখগঘ চাপ কখগঘঙ চাপ তুল্য হইবে অপর চঙঘ কোণ চকখগঘ চাপোপরিস্থ এবং কচঙ কোণ কখগঘঙ চাপোপরিস্থ অতএব চঙঘ কোণ কচঙ সমান। তদ্রূপ ঐ ষড়্ভুজ ক্ষেত্রের অন্যান্য কোণ চঙঘ অথবা কচঙ কোণ সমান উপপন্ন হইবে সুতরাং ঐ ষড়্ভুজ ক্ষেত্র সমান কোণি। পূর্ব্বে তাহা সমবাহুকও উপপন্ন হইয়াছে এবং তাহা কখগঘঙচ বৃত্তে অন্তর্গত হইয়াছে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

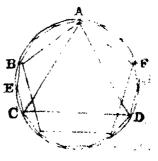
সং উ,। ছঙ=ছঘ এবং ঘঙ=ঘছ ∴ ছঙ=ঘঙ ∴ △ঙছঘ সমবাহুক ∴ ∠ঙছঘ=ছঘঙ=ঘঙছ (১।৫ অনু) ∴ ঙছঘ=২ সমকোণের তৃতীয়াংশ (১।৩২) তদ্রূপ ঘছগ=২সমকোণের তৃতীয়াংশ ∴ ∠গছখ=২সমকোণের তৃতীয়াংশ (১।১৩) ∴ ∠ ঙছঘ=ঘছগ=গছখ= (১।১৫) খছক=কছচ=চছঙ ∴ কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙচ, চক ছয় চাপ সমান ∴ কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙচ, চক ছয় সরল রেখাও পরস্পর সমান (৩।২৯) ∴ কখগঘঙচ ষড়্ভুজ সমবাহুক। পুনশ্চ ∵ কচ চাপ=ঙঘ, ∴ চকখগঘ চাপ=ঙঘগখক চাপ ∴ ∠কচঙ= ∠চঙঘ (৩।২৭)

another (26. 3.) ∴ the straight lines AB, BC, CD, DE, EF, FA are equal to one another (29. 3.) ∴ hexag. ABCDEF is equilateral. Again ∵ arc AF = ED, the whole arc FABCD = arc EDCBA ∴ < AFE = < FED (27. 3.) Similarly the other <s of Hexag. ABCDEF each = AFE or FED ∴ Hexag. ABCDEF is equiangular.

PROP. XVI. PROB.

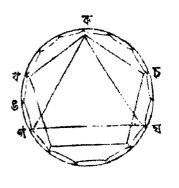
To inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.

Let ABCD be the given circle; it is required to inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in the circle ABCD.

Let AC be the side of an equilateral triangle inscribed (2, 4.) in the circle, and AB the side of an equilateral and equiangular pentagon inscribed (11. 4.) in the same; therefore, of such equal parts as the whole circumference ABCDF contains fifteen, the arch ABC, being the third part of the whole, contains five; and the arch AB, which is the fifth part of the whole, contains three; therefore BC their difference contains two of the same parts, bisect (30. 3.) BC in E; therefore BE, EC are each of them the fifteenth part of the whole circumference ABCDE: therefore if the straight lines BE, EC be drawn, and straight lines equal to them be placed (1. 4.) around in the whole circle, an equilateral and equiangular equindecagon will be inscribed in it. *Which was to be done.*

তদ্রূপ কখগঘঙচ ষড়ভুজের অন্যান্য কোণ প্রত্যেকে=কচঙ অথবা চঙঘ ∴ কখগঘঙচ ষড়ভুজ সমান কোণি।

১৬ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত তন্মধ্যে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করিতে হইবে।

নির্দ্দিষ্ট বৃত্তান্তর্গত এক সমবাহুক ত্রিভুজ হউক (৪।২) কগ তাহার এক বাহু, এবং সমবাহুক ও সমান কোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্রও তাহাতে অন্তর্গত হউক (৪।১১) কখ তাহার এক বাহু। কখগ চাপ পরিধির তৃতীয়াংশ এবং কখ পঞ্চমাংশ অতএব কখগঘচ সমুদয় পরিধি সমান২ করিয়া পঞ্চদশ ভাগে বিভক্ত হইলে কখগ তাহার পঞ্চ ভাগ এবং কখ তাহার তিন ভাগ ধারণ করিবে সুতরাং কখগ হইতে কখ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট খগ চাপ দুই ভাগ ধারণ করিবে। খগ চাপ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (৩।৩০) তাহাতে খঙ ঙগ প্রত্যেকে কখগঘ পরিধির পঞ্চদশাংশ হইবে এবং খঙ ঙগ দুই সরল রেখা টানিয়া তত্তুল্য রেখা সমুদয় পরিধি ব্যাপিয়া (৪।১) বৃত্ত মধ্যে স্থাপিত করিলে এক সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত হইবে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

And, in the same manner, as was done in the pentagon, if through the points of division made by inscribing the quindecagon, straight lines be drawn touching the circle, an equilateral and equiangular quindecagon may be described about it: And likewise, as in the pentagon, a circle may be inscribed in a given equilateral and equiangular quindecagon, and circumscribed about it.

Sym. Dem. Arc ABC = $\frac{5}{15}$ ⊙ ABCDF and arc AB = $\frac{3}{15}$ ⊙ ABCDF ∴ ABC — AB or arc BC = $\frac{2}{15}$ ⊙ ABCDF ∴ arc EB = $\frac{1}{15}$ ⊙ ABCDF ∴ by joining EB and placing straight lines equal to it around in the whole ⊙ an equilateral and equiangular quindecagon will be inscribed in the ⊙

অপর পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্র অন্তর্গত করণে পরিধি যেং বিন্দুতে ছিন্ন হইয়াছে পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিবার পূর্ব্বোক্ত ধারানুসারে সেই সকল ছেদ চিহ্নে বৃত্তস্পর্শক রেখা টানিলে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্র বৃত্তোপরি নিষ্কাস্য হইবে। অপিচ পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের ধারানুসারে পঞ্চদশ ভুজ ক্ষেত্রে বৃত্ত অন্তর্গত এবং নিষ্কাস্য করা যাইতে পারে।

সংজ্ঞা। কখগ চাপ = $\frac{১}{৩}$ ○ কখগঘচ এবং কখ চাপ = $\frac{১}{৫}$ ○ কখগঘচ ∴ কখগ—কখ অর্থাৎ খগ চাপ = $\frac{২}{১৫}$ ○ কখগঘচ ∴ ঙখ চাপ = $\frac{১}{১৫}$ ○ কখগঘচ ∴ ঙখ সংযুক্ত করিয়া তত্তুল্য রেখা পরিধি ব্যাপিয়া স্থাপন করিলে সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চদশ ভুজ বৃত্তান্তর্গত হইবে।

চতুর্থাধ্যায়ঃ সমাপ্তঃ।

BOOK V*.

In the demonstrations of this book there are certain *signs or characters* which it has been found convenient to employ.

"1. The letters A, B, C, &c. are used to denote "magnitudes of any kind. The letters m, n, p, q, are "used to denote numbers only.

"2. The sign + (*plus,*) written between two letters, "that denote magnitudes, or numbers, signifies the "sum of those magnitudes or numbers. Thus, A + "B is the sum of the two magnitudes denoted by the "letters A and B; $m + n$ is the sum of the numbers "denoted by m and n.

"3. The sign — (*minus,*) written between two let- "ters, signifies the excess of the magnitude denoted "by the first of these letters, which is supposed the "greatest, above that which is denoted by the other. "Thus, A — B signifies the excess of the magnitude A "above the magnitude B.

"4. When a number, or a letter denoting a number, "is written close to another letter denoting a magnitude "of any kind, it signifies that the magnitude is multi- "plied by the number. Thus 3 A signifies three times "A; m B, m times B, or a multiple of B by m. When the number is intended to multiply two or more mag- "nitudes that follow, it is written thus, m (A + B,)

* The propositions of the 6th and 5th books are most of them symbolically demonstrated, in whole or in part, in the text. No other demonstrations of the same sort are therefore added.

৫ অধ্যায়* ।

এই অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞা সকল সহজে উপপন্ন করিবার নিমিত্ত কতিপয় চিহ্ন অথবা অক্ষর প্রয়োগ করা গেল ।

১ "ক, খ, গ ইত্যাদি অক্ষরে সর্ব্বজাতীয় রাশি বুঝাইবেক কিন্তু অ ই উ ঋ প্রভৃতি অক্ষর কেবল সংখ্যা বাচক হয়, ।

২ "+ এই চিহ্নের নাম ধন । কোন রাশি অথবা সংখ্যাত্মক অঙ্ক বাচক অক্ষরের মধ্যে ঐ চিহ্ন থাকিলে ঐ রাশি অথবা অঙ্কের সঙ্কলন বুঝায় । যথা ক + খ, ইহার তাৎপর্য্য ক এবং খ অক্ষরে ব্যক্ত দুই রাশির যোগ, তথা অ + ই ইহার তাৎপর্য্য অ এবং ই অঙ্কের যোগ ।

৩ "— এই চিহ্নের নাম ঋণ । দুই অক্ষরের মধ্যস্থলে ঐ চিহ্ন থাকিলে প্রথম অক্ষরোক্ত বৃহত্তর রূপে কল্পিত রাশি হইতে দ্বিতীয়োক্তের ব্যবকলন বুঝায় । যথা ক—খ, ইহার তাৎপর্য্য ক রাশি হইতে খ রাশির অন্তর অর্থাৎ বিয়োগাবশিষ্ট ।

৪ "কোন অঙ্ক অথবা অঙ্ক বাচক কোন অক্ষর কোন রাশির অব্যবহিত নিকটে লিখিত হইলে তাহার অর্থ এই যে ঐ রাশি ঐ অঙ্ক দ্বারা গুণিত হইয়াছে যথা ৩ক অর্থাৎ ক রাশির ত্রিগুণ । অখ অর্থাৎ অ গুণ খ অথবা অ পরিমাণ খ রাশির অপবর্ত্ত্য । উত্তর২ দুই কিম্বা অধিক রাশির গুণক ব্যক্ত করিতে হইলে এই প্রকার লিখিতে হয় যথা অ (ক + খ) ইহার তাৎপর্য্য, ক এবং খ রাশির যোগ অ পরিমাণে গুণিত ।

---

* পঞ্চম এবং ষষ্ঠ অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞার অধিকাংশ সঙ্কেতে উপপন্ন হইয়াছে একারণ তদ্রূপ আর কোন উপলব্ধি যোগ করা গেল না ।

" which signifies the sum of A and B taken *m* times.
" *m* (A—B) is *m* times the excess of A above B.

" Also, when two letters that denote numbers are writ-
" ten close to one another, they denote the product o
" those numbers when multiplied into one another.
" Thus, *mn* is the product of *m* into *n*; and *mn* A is A
" multiplied by the product of *m* into *n*.

" 5. The sign = signifies the equality of the magni-
" tudes denoted by the letters that stand on the oppo-
" site sides of it; A = B signifies that A is equal to B;
" A + B = C— D signifies that the sum of A and B is
" equal to the excess of C above D.

" 6. The sign ⋗ is used to signify that the magni-
" tudes between which it is placed are unequal, and
" that the magnitude to which the opening of the lines
" is turned is greater than the other. Thus A ⋗ B
" signifies that A is greater than B; and A ⋖ B
" signifies that A is less than B."

DEFINITIONS.

I. A less magnitude is said to be a *part* of a greater magnitude, when the less measures the greater, that is, when the less is contained a certain number of times exactly in the greater.

II. A greater magnitude is said to be a *multiple* of a less, when the greater is measured by the less, that is, when the greater contains the less a certain number of times exactly.

III. *Ratio* is a mutual relation of two magnitudes, of the same kind, to one another in respect of quantity.

IV. Magnitudes are said to be of the *same kind*, when the less can be multiplied so as to exceed the greater;* and it is only such magnitudes that are said to have a ratio to one another.

V. If there be four magnitudes, and if any equimultiples whatsoever be taken of the first and third, and

তথা অ (ক—খ) ইহার তাৎপর্য্য, ক এবং খ রাশির অন্তর অ পরিমাণে গুণিত।

"অপিচ দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক বাচক অক্ষর পরস্পরের সন্নিধ্যানে লিখিত হইলে তাহাতে ঐ দুই অঙ্কের গুণিত ফল ব্যক্ত হয় যথা অই অর্থাৎ অ এবং ই অঙ্কের গুণিত ফল। তথা অইক অর্থাৎ অ এবং ই অঙ্কের গুণিত ফলে ক রাশির গুণন।

৫ "= এই চিহ্ন যেং অক্ষরের মধ্যস্থলে থাকে তদ্বাচ্য রাশির তুল্যতা ব্যক্ত হয় যথা ক=খ অর্থাৎ ক খ সমান। তথা ক+খ =গ—ঘ অর্থাৎ ক এবং খ যোগে গ হইতে ঘ বিয়োগাবশিষ্ট সমান হয়।

৬" > এই চিহ্নের অর্থ যে দুই পার্শ্বস্থ রাশি পরস্পর সমান নহে এবং যে দিকে ঐ চিহ্নের মুখ অনাবৃত থাকে তদ্দিকস্থ রাশি অন্য দিকস্থ রাশির অতিরিক্ত। যথা ক > খ ইহার তাৎপর্য্য যে ক খ হইতে অতিরিক্ত। তথা ক < খ ইহার তাৎপর্য্য যে ক খ হইতে ন্যূন"।

সংজ্ঞা।

১। ক্ষুদ্রতর রাশি বৃহত্তরের অপবর্ত্তন হইলে অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর কিয়ৎ সংখ্যক পরিমাণে বৃহত্তরে ব্যাপ্ত হইলে ক্ষুদ্রতরকে বৃহত্তরের অংশ কহা যায়।

২। বৃহত্তর রাশি ক্ষুদ্রতর দ্বারা পরিমেয় হইলে অর্থাৎ কিয়ৎ সংখ্যক পরিমাণে ক্ষুদ্রতরের ব্যাপক অথবা তাজ্য হইলে বৃহত্তরকে ক্ষুদ্রতরের অপবর্ত্ত্য কহা যায়।

৩। সজাতীয় দুই রাশির মধ্যে পরস্পরের পরিমাণ বিষয়ে যে তারতম্য সম্বন্ধ থাকে তাহাকে নিষ্পত্তি কহা যায়।

৪। দুই রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতরের গুণনে বৃহত্তরের অধিক ফল প্রাপ্তি সম্ভাব্য হইলে তাহারদিগকে সজাতীয় কহাযায় এবং কেবল তাদৃশ রাশির মধ্যেই নিষ্পত্তি সম্বন্ধ থাকিতে পারে।

any equimultiples whatsoever of the second and fourth; and if, according as the multiple of the first is greater than the multiple of the second, equal to it, or less, the multiple of the third is also greater than the multiple of the fourth, equal to it, or less; then the first of the magnitudes is said to have to the second the same ratio that the third has to the fourth.

VI. Magnitudes are said to be *proportionals*, when the first has the same ratio to the second that the third has to the fourth; and the third to the fourth he same ratio which the fifth has to the sixth, and so on, whatever be their number.

"When four magnitudes, A, B, C, D are proportionals, it is usual to say that A is to B as C to D, and to write them thus, A : B : : C : D, or thus, A : B = C : D."

VII. When of the equimultiples of four magnitudes, taken as in the definition, the multiple of the first is greater than that of the second, but the multiple of the third is not greater than the multiple of the fourth; then the first is said to have to the second a *greater ratio* than the third magnitude has to the fourth; and, on the contrary, the third is said to have to the fourth a *less ratio* than the first has to the second.

VIII. When there is any number of magnitudes greater than two, of which the first has to the second the same ratio that the second has to the third, and the second to the third the same ratio which the third has

৫। চারি রাশির মধ্যে প্রথম এবং তৃতীয়ের সম অপবর্ত্ত্য কোন অঙ্ক এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের সম অপবর্ত্ত্য কোন অঙ্ক কল্পনা করিলে এবং প্রথম রাশির অপবর্ত্ত্য দ্বিতীয় রাশির অপবর্ত্ত্যের সমাতিরিক্ত কিম্বা ন্যূন হইলে যদি তৃতীয় রাশির অপবর্ত্ত্য চতুর্থ রাশির অপবর্ত্ত্যের তদ্রূপ সমাতিরিক্ত কিম্বা ন্যূন হয় তবে প্রথম ও দ্বিতীয়ের নিষ্পত্তি পরিমাণকে তৃতীয় এবং চতুর্থের নিষ্পত্তি পরিমাণের সমান কহা যায়।

৬। কতিপয় রাশির মধ্যে প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ তাহা তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণ তুল্য হইলে এবং তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত যে নিষ্পত্তি তাহা পঞ্চমের ষষ্ঠ সহিত নিষ্পত্তির তুল্য হইলে আর অবশিষ্ট যত রাশি থাকে সকলের ক্রমশঃ তদ্রূপ পরিমাণে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ থাকিলে রাশি সকলকে অনুপাতীয় কহা যায়।

"চারি রাশি (যথা ক খ গ ঘ) অনুপাতীয় হইলে এইরূপ উক্তি করিবার রীতি আছে, ক যথা খ সম্বন্ধে গ তথা ঘ সম্বন্ধে. এবং তাহা লিখিবার সঙ্কেত এই যথা ক : খ :: গ : ঘ অথবা ক : খ = গ : ঘ"।

৭। পঞ্চম সংজ্ঞানুযায়ি চারি রাশির সম অপবর্ত্ত্য কল্পন করিলে প্রথম রাশির অপবর্ত্ত্য যদি দ্বিতীয়ের অধিক এবং তৃতীয়ের অপবর্ত্ত্য যদি চতুর্থের অনধিক হয় তবে প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণকে তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণের অধিক কহা যায়, এবং তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তিকে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির ন্যূন কহা যায়।

৮। তিন কিম্বা অধিক রাশির মধ্যে প্রথম রাশির যদি দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি দ্বিতীয়ের তৃতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং দ্বিতীয়ের যদি তৃতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং ঐরূপ তুল্য পরিমাণ

to the fourth, and so on, the magnitudes are said to be *continual proportionals.*

IX. When three magnitudes are continual proportionals, the second is said to be a *mean proportional* between the other two.

X. When there is any number of magnitudes of the same kind, the first is said to have to the last the ratio *compounded* of the ratio which the second has to the third, and of the ratio which the third has to the fourth, and so on unto the last magnitude.

For example, if A, B, C, D be four magnitudes of the same kind, the first A is said to have to the last D, the ratio compounded of the ratio of A to B, and of the ratio of B to C, and of the ratio of C to D; or the ratio of A to D is said to be compounded of the ratios of A to B, B to C, and C to D.

And if A : B : : E : F; and B : C : : G : H; and C : D : : K : L, then, since by this definition, A has to D the ratio compounded of the ratios of A to B, B to C, C to D: A may also be said to have to D the ratio compounded of the ratios which are the same with the ratios of E to F, G to H, and K to L.

In like manner, the same things being supposed, if M has to N the same ratio which A has to D, then, for shortness' sake, M is said to have to N a ratio compounded of the same ratios, which compound the ratio of A to D; that is, a ratio compounded of the ratios of E to F, G, to H, and K to L.

যদি ক্রমশঃ সমুদয় রাশিতে বর্ত্তে তবে সে সকল রাশিকে অবিরত অনুপাতীয় কহা যায়।

৯। তিন রাশি অবিরত অনুপাতীয় হইলে দ্বিতীয় রাশিকে অবশি দুয়ের "মধ্য অনুপাতীয়" কহা যায়।

১০। সজাতীয় কতিপয় রাশি থাকিলে প্রথম রাশির শেষ রাশি সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ তাহাকে প্রথমের দ্বিতীয় সহিত, দ্বিতীয়ের তৃতীয় সহিত, তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত, এবং ক্রমশঃ শেষ পর্য্যন্ত যত সম্বন্ধ সম্ভাব্য সকলের যোগ নিষ্পত্তি কহা যায়।

উদাহরণ। যদি ক খ গ ঘ সজাতীয় চারি রাশি কল্পিত হয় তবে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহাকে ক রাশির খ সম্বন্ধীয়, খ রাশির গ সম্বন্ধীয়, গ রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগ কহা যায় অর্থাৎ ঘ সম্বন্ধে ক রাশির যে নিষ্পত্তি তাহা খ সম্বন্ধে ক রাশির, গ সম্বন্ধে খ রাশির, ঘ সম্বন্ধে গ রাশির নিষ্পত্তির যোগ তুল্য।

অপিচ যদি ক : খ :: ঙ : চ এবং খ : গ : : ছ : জ এবং গ : ঘ :: ঝ : ঞ তবে এই সংজ্ঞানুসারে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক রাশির খ সম্বন্ধীয়, খ রাশির গ সম্বন্ধীয়, গ রাশির ঘ সম্বন্ধীয়, নিষ্পত্তির সংযোগ তুল্য হওয়াতে এমত কহা যাইতে পারে যে ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ঙ রাশির চ সম্বন্ধীয়, ছ রাশির জ সম্বন্ধীয়, এবং ঝ রাশির ঞ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগ তুল্য।

তথা পূর্ব্ববৎ কল্পনা করিলে ট রাশির ঠ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যদি ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে সংক্ষেপে কহা যাইতে পারে যে ট রাশির ঠ সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক রাশির ঘ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির ন্যায় যোগোৎপন্ন অর্থাৎ তাহা ঙ রাশির চ সম্বন্ধীয় ছ রাশির জ সম্বন্ধীয় এবং ঝ রাশির ঞ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সংযোগে উৎপন্ন হইয়াছে।

XI. If three magnitudes are continual proportionals, the ratio of the first to the third is said to be *duplicate* of the ratio of the first to the second.

"Thus, if A be to B as B to C, the ratio of A to C is "said to be *duplicate* of the ratio of A to B. Hence, "since by the last definition, the ratio of A to C is "compounded of the ratios of A to B, and B to C, a "ratio, which is compounded of two equal ratios, is "*duplicate* of either of these ratios."

XII. If four magnitudes are continual proportionals, the ratio of the first to the fourth is said to be *triplicate* of the ratio of the first to the second, or of the ratio of the second to the third, &c

"So also, if there are five continual proportionals; the "ratio of the first to the fifth is called *quadruplicate* of "the ratio of the first to the second, and so on, ac-"cording to the number of ratios. Hence, a ratio com-"pounded of three equal ratios is *triplicate* of any one "of those ratios; a ratio compounded of four equal "ratios *quadruplicate*," &c.

XIII In proportionals, the antecedent terms of the ratios are said to be *homologous* to one another, and the consequents of the ratios are said to be *homologous* to one another.

Geometers make use of the following technical words to signify certain ways of changing either the order or magnitude of proportionals, so as, that they continue still to be proportionals.

XIV. *Permutando*, or *alternando*, by *permutation*, or *alternately*; this word is used when there are four

১১ তিন রাশি অবিরত অনুপাতীয় হইলে প্রথমের তৃতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তিকে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির দ্বিঘাত কহা যায়।

উদাহরণ। যদি ক যথা খ সম্বন্ধে খ তথা গ সম্বন্ধে কল্পিত হয় তবে ক রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তিকে ক রাশির খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির দ্বিঘাত কহা যায়। অতএব পূর্ব্বোক্ত সংজ্ঞানুসারে ক রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক রাশির খ সম্বন্ধীয় এবং খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগোৎপন্ন হওয়াতে নিশ্চিত হইতেছে যে দুই সমান নিষ্পত্তির যোগোৎপন্ন নিষ্পত্তি এক২ নিষ্পত্তির দ্বিঘাত হইবে।

১২ চারি রাশি যদি অবিরত অনুপাতীয় হয় তবে চতুর্থ সহিত প্রথমের নিষ্পত্তি সম্বন্ধকে দ্বিতীয় সহিত প্রথমের অথবা তৃতীয় সহিত দ্বিতীয়ের নিষ্পত্তির ত্রিঘাত কহা যায়।

"তদ্রূপ পঞ্চ রাশি অবিরত অনুপাতীয় হইলে পঞ্চমের সম্বন্ধে প্রথমের নিষ্পত্তিকে দ্বিতীয়ের সম্বন্ধে প্রথমের নিষ্পত্তির চতুর্ঘাত কহা যায়। ততোধিক রাশি থাকিলেও ক্রমশঃ ঐ রূপ হইবে। অতএব দুই সমান২ নিষ্পত্তির যোগে যে নিষ্পত্তি উৎপন্ন হয় তাহাকে ঐ ২ নিষ্পত্তির প্রত্যেকের দ্বিঘাত এবং চারি সমান২ নিষ্পত্তির যোগে যে নিষ্পত্তি উৎপন্ন হয় তাহাকে চতুর্ঘাত কহা যায়"।

১৩ অনুপাতীয় রাশির মধ্যে অগ্রবর্ত্তী গণকে পরস্পর সবর্ণীয় কহা যায়, পশ্চাদ্বর্ত্তি গণেরও ঐ পরিভাষা।

অনুপাতীয় রাশির নিষ্পত্তি সম্বন্ধের ব্যতিক্রম না করিয়া তাহারদের শ্রেণী অথবা পরিমাণ অন্যরূপ করিবার যে২ ধারা আছে ক্ষেত্রতত্ত্ববিৎ পণ্ডিতেরা তদ্বিষয়ে নিম্ন লিখিত পরিভাষার প্রয়োগ করেন।

১৪ বিনিময় নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অনুমেয় হয় যে প্রথমের তৃতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি

proportionals, and it is inferred, that the first has the same ratio to the third which the second has to the fourth, or that the first is to the third as the second to the fourth: See Prop. 16, of this Book

XV *Invertendo* by *Inversion*: When there are four proportionals, and it is inferred, that the second is to the first as the fourth to the third. Prop. A. Book

XVI *Componendo*, by *composition* When there are four proportionals, and it is inferred, that the first, together with the second, is to the second as the third together with the fourth, is to the fourth. 18th Prop Book 5.

XVII. *Dividendo* by *division* When there are four proportionals, and it is inferred, that the excess of the first above the second, is to the second, as the excess of the third above the fourth, is to the fourth 17th Prop. Book 5

XVIII. *Convertendo* by *conversion*. When there are four proportionals, and it is inferred, that the first is to its excess above the second, as the third to its excess above the fourth. Prop. D. Book 5

XIX. *Ex æquali*, (sc. distantia,) or, *ex æquo*, from equality of distance, when there is any number of magnitudes more than two, and as many others, so that they are proportionals when taken two and two of

দ্বিতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি, তবে "বিনিময় নিষ্পত্তি" পরিভাষা প্রয়োগ হয়। এই অধ্যায়ের ১৬ প্রতিজ্ঞাতে দৃষ্টিপাত কর।

১৫ বিলোম নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়ের প্রথম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি চতুর্থের তৃতীয় সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি, তবে উক্ত পরিভাষার ব্যবহার হয়। ৫ অধ্যায় ক প্রতিজ্ঞা।

১৬ যোগ নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয় সম্বন্ধে প্রথম এবং দ্বিতীয়ের যোগোৎপন্ন রাশির যে নিষ্পত্তি চতুর্থ সম্বন্ধে তৃতীয় এবং চতুর্থের যোগোৎপন্ন রাশির সেই নিষ্পত্তি, তবে এই পরিভাষার প্রয়োগ হয়। ৫ অধ্যায় ১৮ প্রতিজ্ঞা।

১৭ অন্তর নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়কে প্রথম হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্ট রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি চতুর্থকে তৃতীয় হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্ট রাশিরও চতুর্থ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি তবে উক্ত পারিভাষিক শব্দ প্রয়োগ হয়। ৫ অধ্যায় ১৭ প্রতিজ্ঞা।

১৮ পরিবর্ত্ত নিষ্পত্তি। চারি অনুপাতীয় রাশি থাকিলে যদি এমত অনুমেয় হয় যে দ্বিতীয়কে প্রথম হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্টের সম্বন্ধে প্রথমের যে নিষ্পত্তি চতুর্থকে তৃতীয় হইতে ব্যবকলন করিলে তদবশিষ্টের সম্বন্ধে তৃতীয়ের সেই নিষ্পত্তি তবে ঐ পারিভাষিক শব্দের ব্যবহার হয়। ৫ অধ্যায় খ প্রতিজ্ঞা।

১৯। দূর সামান্যতঃ। তিন কিম্বা তদধিক রাশি শ্রেণীবদ্ধ হইলে এবং তৎসংখ্যক অপর কতিপয় রাশি অন্য শ্রেণীতে কল্পিত হইলে যদি প্রত্যেক শ্রেণীস্থ দুইং রাশি অনুপাতীয় হয় এবং যদিএমত অনুমেয় হয় যে আদ্য শ্রেণীস্থ

each rank, and it is inferred, that the first is to the last of the first rank of magnitudes, as the first is to the last of the others. Of this there are the two following kinds, which arise from the different order in which the magnitudes are taken two and two.

XX. *Ex æquali*, from equality: this term is used simply by itself, when the first magnitude is to the second of the first rank, as the first to the second of the other rank; and as the second is to the third of the first rank, so is the second to the third of the other; and so on in order, and the inference is as mentioned in the preceding definition; whence this is called ordinate proportion. It is demonstrated in the 22d Prop. Book 5.

XXI. *Ex æquali, in proportione perturbata, seu inordinata*; from equality, in perturbate, or disorderly proportion: this term is used when the first magnitude is to the second of the first rank, as the last but one is to the last of the second rank; and as the second is to the third of the first rank, so is the last but two to the last but one of the second rank; and as the third is to the fourth of the first rank, so is the third from the last, to the last but two, of the second rank; and so on in a cross, or *inverse* order; and the inference is as in the 19th definition. It is demonstrated in the 23d Prop. of Book V.

AXIOMS.

I. EQUIMULTIPLES of the same, or of equal magnitudes, are equal to one another.

প্রথম রাশির অন্তিম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির ও অন্তিম সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, তবে ঐ শব্দের প্রয়োগ হয়। ভিন্ন২ রূপে দুই২ রাশি উহ্য হওয়াতে এবম্ভূত নিষ্পত্তির নিম্ন লিখিত দুই ধারা সম্ভাব্য।

২০। সামান্যতঃ। আদ্য শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি হইলে এবং আদ্য শ্রেণীস্থ দ্বিতীয় রাশির তৃতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ দ্বিতীয় রাশির তৃতীয় সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি তথা উত্তরোত্তর ক্রমশঃ তদ্রূপ নিষ্পত্তি সম্বন্ধ থাকিলে যদি পূর্ব্বলক্ষণোক্ত অনুমান যোগ্য হয় তবে কেবল "সামান্যতঃ" এই শব্দের প্রয়োগ করা যায় একারণ ইহাকে যথাক্রম নিষ্পত্তি কহে। এবিষয় ৫ অধ্যায় ২২ প্রতিজ্ঞাতে উপপন্ন হইয়াছে।

২১। বিপরীত অথবা ক্রম রহিত নিষ্পত্তি সামান্যতঃ। আদ্য শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ একোন শেষের শেষরাশি সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, এবং আদ্য শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের তৃতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ দ্ব্যূন শেষরাশির একোন শেষ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি, তথা আদ্য শ্রেণীস্থ তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর শ্রেণীস্থ ত্র্যূন শেষ রাশির দ্ব্যূন শেষ সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি এবং উত্তরোত্তর এইরূপ বিরুদ্ধ অথবা বিপরীত ক্রম নিষ্পত্তি হইলে যদি ১৯ লক্ষণোক্ত অনুমান যোগ্য হয় তবে উক্ত শব্দের প্রয়োগ করা যায়। ইহা ৫ অধ্যায়ে ২৩ প্রতিজ্ঞায় উপপন্ন হইয়াছে।

স্বতঃ সাধ্য।

১। এক অথবা সমান২ রাশির সম অপবর্ত্ত্য সকল পরস্পর সমান।

II. Those magnitudes of which the same, or equal magnitudes, are equimultiples, are equal to one another.

III. A multiple of a greater magnitude is greater than the same multiple of a less.

IV. The magnitude of which a multiple is greater than the same multiple of another, is greater than that other magnitude.

PROP. I. THEOR.

If any number of magnitudes be equimultiples of as many others, each of each, what multiple soever any one of the first is of its part, the same multiple is the sum of all the first of the sum of all the rest.

Let any number of magnitudes A, B, and C be equimultiples of as many others, D, E, F, each of each; A + B + C is the same multiple of D + E + F, that A is of D.

Let A contain D, B contain E, and C contain F, each the same number of times, as, for instance, three times. Then, because A contains D three times,

$$A = D + D + D.$$

For the same reason, $B = E + E + E$;

And also, $C = F + F + F$.

Therefore, adding equals to equals (Ax. 2.1.), A + B + C is equal to D + E + F, taken three times. In

২। এক অথবা সমান২ রাশি যে২ রাশির সম অপবর্ত্ত্য হয় সে সকল রাশি পরস্পর সমান।

৩। বৃহত্তর রাশির অপবর্ত্ত্য লঘুতরের তৎপরিমাণানুযায়ি অপবর্ত্ত্যের বৃহত্তর হয়।

৪। কোন রাশির অপবর্ত্ত্য অন্য রাশির তাদৃশ অপবর্ত্ত্য হইতে অধিক হইলে প্রথমোক্ত রাশি দ্বিতীয়াপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

---

১ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

কতিপয় রাশি যদি ক্রমশঃ তৎসংখ্যক অন্য কএক রাশির সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হয় তবে যৎপরিমাণে প্রথমোক্ত কোন রাশি স্বীয় অংশের অপবর্ত্ত্য হয় সেই পরিমাণে প্রথমোক্ত সমুদয় রাশি একত্র যোগে অপর সমুদয় রাশি যোগের অপবর্ত্ত্য হইবে।

ক খ গ কএক রাশি ক্রমশঃ ঘ ঙ চ তৎসংখ্যক অপর কএক রাশির সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হউক। ক রাশি যে পরিমাণে ঘ রাশির অপবর্ত্ত্য ক + খ + গ সেই পরিমাণে ঘ + ঙ + চ রাশির অপবর্ত্ত্য হইবে।

ক খ গ এই তিন রাশি ক্রমশঃ সমান২ পরিমাণে ঘ ঙ চ রাশি ত্রয়ের ব্যাপক হউক অর্থাৎ ত্রিগুণ পরিমাণে অপবর্ত্ত্য হউক। অতএব ক ত্রিগুণ পরিমাণে ঘ রাশির ব্যাপক একারণ

ক = ঘ + ঘ + ঘ

ঐকারণ খ = ঙ + ঙ + ঙ

এবং গ = চ + চ + চ

অতএব সমান২ রাশি যোগ করিলে (১।২ স্বতঃ সাধ্য) ক + খ + গ = ত্রিগুণ ঘ + ঙ + চ। তদ্রূপ ক খ গ অন্য কোন পরিমাণে ক্রমশঃ ঘ ঙ চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য হইলে ক + খ +

the same manner, if A, B, and C were each any other equimultiple of D, E, and F, it would be shewn that A + B + C was the same multiple of D + E + F. Therefore, &c. Q. E. D.

COR. Hence if m be any number, $mD + mE + mF = m(D + E + F.)$ For mD, mE, and mF, are multiples of D, E, and F by m, therefore their sum is also a a multiple of D + E + F by m.

PROP. II. THEOR.

If to a multiple of a magnitude by any number, a multiple of the same magnitude by any number be added the sum will be the same multiple of that magnitud that the sum of the two numbers is of unity.

Let $A = mC$, and $B = nC$; $A + B = (m+n) C$

For, since $A = mC$, $A = C + C + C +$ &c. C bein repeated m times For the same reason, $B = C + C +$ &c. C being repeated n times. Therefore, adding equa to equals, A + B is equal to C taken $m + n$ times: th is, $A + B = (m+n) C$ Therefore A + B contains as oft as there are units in $m + n$. Q. E. D.

COR. 1. In the same way, if there be any numb of multiples whatsoever, as $A = mE$, $B = nE$, $C = pE$, it is shewn, that $A + B + C = (m+n+p) E$

COR. 2. Hence also, since $A + B + C = (m + n + p) E$, and since $A = mE$, $B = nE$, and $C = pE$, $mE + nE + pE, = (m+n+p) E$.

গ সেই পরিমাণে ঘ + ঙ + চ রাশির অপবর্ত্ত্য সপ্রমাণ হইবে। অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। অ যদি কোন সংখ্যাত্মক অঙ্ক বলিয়া কল্পিত হয় তবে অঘ + অঙ + অচ = অ (ঘ + ঙ + চ) কেননা অঘ, অঙ, অচ, অ পরিমাণে ঘ, ঙ, চ রাশির অপবর্ত্ত্য একারণ তাহারদের যোগও অ পরিমাণে ঘ + ঙ + চ অপবর্ত্ত্য হইবে।

---

২ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

কোন রাশির কিয়ৎ পরিমাণ অপবর্ত্ত্যে যদি সেই রাশির কিয়ৎ পরিমাণ অপবর্ত্ত্য যোগ করাযায় তবে ঐ দুই অঙ্ক সঙ্কলনে একের যে অপবর্ত্ত্য হইবে ঐ দুই অপবর্ত্ত্যের যোগে উক্ত রাশির সেই অপবর্ত্ত্য হইবে।

ক = অগ এবং খ = ইগ কল্পনা করিলে ক + খ = (অ + ই) গ কেননা ক = অগ হওয়াতে, ক = গ + গ + গ ইত্যাদি অ গুণ পর্য্যন্ত। ঐ কারণ খ = গ + গ + গ ইত্যাদি ই গুণ পর্য্যন্ত। অতএব সমান২ রাশি সমান২ রাশিতে যোগ করিলে ক + খ রাশি অ + ই গুন গ রাশি সমান হইবে অর্থাৎ ক + খ = (অ + ই) গ। সুতরাং ক + খ রাশি অ + ই পরিমাণে গ রাশির ব্যাপক হইবে। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১ অনুমান। তদ্রূপ যত অপবর্ত্ত্য হউক যথা ক = অ ঙ, খ = ই ঙ, গ = উ ঙ, ক + খ + গ = (অ + ই + উ) ঙ উপপন্ন হইবে।

২ অনুমান। অপিচ ক + খ + গ = (অ + ই + উ) ঙ এবং ক = অ ঙ, খ = ইঙ গ = অঙ, একারণ অঙ + ইঙ + উঙ = (অ + ই + উ) ঙ।

PROP. III. THEOR.

If the first of three magnitudes contain the second as oft as there are units in a certain number, and if the second contain the third also, as often as there are units in a certain number, the first will contain the third as oft as there are units in the product of these two numbers.

Let $A = mB$ and $B = nC$; then $A = mnC$.

Since $B = nC$, $mB = nC + nC +$ &c. repeated m times. But $nC + nC$ &c. repeated m times is equal to C (2 Cor. 2. 5.), multiplied by $n + n +$ &c. n being added to itself m times; but n added to itself m times, is n multiplied by m, or mn. Therefore $nC + nC +$ &c. repeated m times $= mnC$; whence also $mB = mnC$, and by hypothesis $A = mB$, therefore $A = mnC$. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

If the first of four magnitudes has the same ratio to the second which the third has to the fourth, and if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any whatever of the second and fourth, the multiple of the first shall have the same ratio to the multiple of the second, that the multiple of the third has to the multiple of the fourth.

Let $A : B :: C : D$, and let m and n be any two numbers; $mA : nB :: mC : nD$.

৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

তিন রাশির মধ্যে প্রথম রাশি যদি কিয়ৎ পরিমাণে দ্বিতীয় রাশির ব্যাপক হয় এবং দ্বিতীয় রাশিও যদি কিয়ৎ পরিমাণে তৃতীয় রাশির ব্যাপক হয় তবে প্রথম রাশি ঐ দুই অঙ্কের গুণন ফল পরিমাণে তৃতীয় রাশির ব্যাপক হইবে।

ক = অখ এবং খ = ইগ কল্পনা কর। তবে ক = অইগ হইবে।

খ = ইগ একারণ অখ = ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার পর্য্যন্ত। অপর ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার পর্য্যন্ত যোগ হইলে ই + ই ইত্যাদি স্বয়ং অ বার পর্য্যন্ত যোগে গুণিত গ সমান হইবে। অধিকন্তু ই আপনাতে অ বার পর্য্যন্ত যুক্ত হইলে অ দ্বারা গুণিত ই অর্থাৎ অই সমান হইবে (৫।২) দ্বিতীয় অনুমান)। অতএব ইগ + ইগ ইত্যাদি অ বার যোগে = অইগ সুতরাং অখ = অইগ। অপর ক = অখ কল্পিত হইয়াছে অতএব ক = অইগ। অতএব তিন রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি রাশির মধ্যে যদি প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি সমান হয় এবং প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সম অপবর্ত্ত্য তথা দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সম অপবর্ত্ত্য যদি কল্পনা করা যায় তবে প্রথম রাশির অপবর্ত্ত্যের দ্বিতীয় রাশির অপবর্ত্ত্য সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয় রাশির অপবর্ত্ত্যের চতুর্থ রাশির অপবর্ত্ত্য সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হইবে।

ক : খ :: গ : ঘ কল্পনা কর এবং অ ও ই কোন দুই অঙ্ক জ্ঞান কর, তবে অক : ইখ :: অগ : ইঘ।

Take of mA and mC equimultiples by any number p, and of nB and nD equimultiples by any number q. Then the equimultiples of mA and mC by p, are equimultiples also of A and C, for they contain A and C as oft as there are units in pm (3. 5.), and are equal to pmA and pmC. For the same reason, the multiples of nB and nD by q, are qnB, qnD. Since, therefore, A : B : : C : D, and of A and C there are taken any equimultiples, viz. pmA and pmC, and of B and D, any equimultiples qnB, qnD, if pmA be greater than qnB, pmC must be greater than qnD (Def. 5. 5.); if equal, equal; and if less, less. But pmA, pmC are also equimultiples of mA and mC, and qnB, qnD are equimultiples of nB and nD, therefore (Def. 5. 5.), mA : nB : : mC : nD. Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. In the same manner, it may be demonstrated, that if A : B : : C : D, and of A and C equimultiples be taken by any number m, viz. mA and mC; mA : B : : mC : D. This may also be considered as included in the proposition, and as being the case when $n=1$.

PROP. V. THEOR.

If one magnitude be the same multiple of another, which a magnitude taken from the first is of a magnitude taken from the other; the remainder is the same multiple of the remainder, that the whole is of the whole.

Let mA and mB be any equimultiples of the two magnitudes A and B, of which A is greater than B;

অক এবং অগ রাশির কোন অঙ্ক অর্থাৎ উ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং ইখ ও ইঘ রাশির কোন অঙ্ক অর্থাৎ ঋ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। উ পরিমাণে অক এবং অগ রাশির সম অপবর্ত্ত্য ক এবং গ রাশিরও সম অপবর্ত্ত্য হইবে কেননা তাহারা উঅ পরিমাণে ক এবং গ রাশির ব্যাপক (৫।৩) সুতরাং উঅক এবং উঅগ তুল্য হইবে। ঐ কারণ ঋ পরিমাণে ইখ এবং ইঘ রাশির অপবর্ত্ত্য ঋইখ এবং ঋইঘ হইবে। অতএব ক : খ :: গ : ঘ হওয়াতে এবং ক ও গ রাশির উঅক এবং উঅগ সম অপবর্ত্ত্য তথা খ এবং ঘ রাশির ঋইখ ও ঋইঘ সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হওয়াতে উঅক যদি উঅগ রাশির অধিক হয় তবে ঋইখ ও ঋইঘ রাশির অধিক হইবেক যদি সমান হয় তবে সমান এবং যদি ন্যূন হয় তবে ন্যূন হইবেক (৫।৫ সংজ্ঞা) অপর ইঅক এবং ইঅগ, অক এবং অগ রাশিরও সম অপবর্ত্ত্য এবং ঋইখ ও ঋইঘ ইখ এবং ইঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অতএব ইক : অখ :: অগ : ইঘ। অতএব চারি রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। তদ্রূপ যদি ক : খ :: গ : ঘ হয় এবং কোন অঙ্ক অর্থাৎ অ পরিমাণে ক এবং গ রাশির সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা করা যায় যথা অক এবং অগ তবে অক : খ :: অগ : ঘ উপপন্ন হইবে। কিন্তু এ অনুমান উক্ত প্রতিজ্ঞাতেই উক্ত, ইহা কহা যাইতে পারে কেননা অ = ১ হইলে ঐ উপপত্তি হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

এক রাশি যে পরিমাণে অন্য কোন রাশির অপবর্ত্ত্য সেই পরিমাণে প্রথমের এক ভাগ যদি অপরের এক ভাগের অপবর্ত্ত্য হয় তবে সমুদয় রাশি যে পরিমাণে সমুদয়ের অপ-

$mA - mB$ is the same multiple of $A - B$ that mA is of A; that is, $mA - mB = m(A - B.)$

Let D be the excess of A above B, then $A - B = D$, and, adding B to both, $A = D + B$. Therefore (1. 5.) $mA = mD + mB$; take mB from both, and $mA - mB = mD$; but $D = A - B$, therefore $mA - mB = m(A - B.)$ Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

If from a multiple of a magnitude by any number a multiple of the same magnitude by a less number be taken away, the remainder will be the same multiple of that magnitude, that the difference of the numbers is of unity.

Let mA and nA be multiples of the magnitude A, by the numbers m and n, and let m be greater than n; $mA - nA$ contains A as oft as $m - n$ contains unity, or $mA - nA = (m - n)A$.

Let $m - n = q$, then $m = n + q$. Therefore (2. 3.) $mA = nA + qA$, take nA from both, and $mA - nA = qA$. Therefore $mA - nA$ contains A as oft as there are units in q, that is, in $m - n$, or $mA - nA = (m - n)A$. Therefore, &c. Q. E. D.

COR. When the difference of the two numbers is equal to unity, or $m - n = 1$, then $mA - nA = A$.

র্ত্ত্য অবশিষ্ট ভাগও সেই পরিমাণে অবশিষ্টের অপবর্ত্ত্য হইবে

অক এবং অখ রাশি ক এবং খ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর তাহার মধ্যে ক রাশি খ রাশি হইতে অধিক। অক যে পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্ত্য অক—অখ সেই পরিমাণে ক—খ রাশির অপবর্ত্ত্য হইবে অর্থাৎ অক—অখ= অ (ক—খ)।

ক হইতে খ ব্যবকলন করিলে ঘ অবশিষ্ট কল্পনা কর অতএব ক—খ=ঘ। অপর উভয় পার্শ্বে খ যোগ করিলে ক = ঘ+খ। অতএব (৫।১) অক = অঘ+অখ এবং উভয় স্থলে অখ বিয়োগ করিলে অক — অখ = অঘ। অধিকন্তু ঘ = ক—খ অতএব অক—অখ = অ (ক—খ)। অতএব এক রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন রাশির কিয়ৎ পরিমাণানুযায়ি অপবর্ত্ত্য হইতে সেই রাশির তদপেক্ষা ক্ষুদ্র পরিমাণানুযায়ি অপবর্ত্ত্য ব্যবকলন করিলে ঐ দুই অঙ্কের অন্তর যে পরিমাণে একের অপবর্ত্ত্য সেই পরিমাণে অবশিষ্টাংশ উক্ত রাশির অপবর্ত্ত্য হইবে।

অক এবং ইক অ এবং ই পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং অ অঙ্ক ই হইতে অধিক জ্ঞান কর। অক—ইক অ—ই পরিমাণে ক রাশির ব্যাপক হইবে অর্থাৎ অক —ইক = (অ—ই) ক।

অ—ই = উ কল্পনা কর তাহাতে অ = ই+উ অতএব (২।৩) অক = ইক + উক, উভয় পার্শ্ব হইতে ইক বিয়োগ কর তাহাতে অক—ইক =উক হইবে।

PROP. A. THEOR.

If four magnitudes be proportionals, they are proportionals also when taken inversely.

If A : B : : C : D, then also B : A : : D : C.

Let mA and mC be any equimultiples of A and C, nB and nD any equimultiples of B and D. Then, because A : B : : C : D, if mA be less than nB, mC will be less than nD (Def. 5. 5.), that is, if nB be greater than mA, nD will be greater than mC. For the same reason, if $n\text{B} = m\text{A}$, $n\text{D} = m\text{C}$, and if $n\text{B} < m\text{A}$, $n\text{D} < m\text{C}$. But nB, nD are any equimultiples of B and D, and mA, mC any equimultiples of A and C, therefore (Def 5. 5.), B : A : : D : C. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. B. THEOR.

If the first be the same multiple of the second, or the same part of it, that the third is of the fourth; the first is to the second as the third to the fourth.

First, if mA, mB be equimultiples of the magnitudes A and B; mA : A : : mB : B.

Take of mA and mB equimultiples by any number n; and of A and B equimultiples by any number p: these will be nmA (3. 5.), pA, nmB (3. 5.), pB. Now, if nmA be greater than pA, nm is also greater than p; and if

অতএব অক—ইক রাশি উ অর্থাৎ অ—ই পরিমাণে ক রাশির ব্যাপক হইবে অর্থাৎ অক—ইক = (অ—ই) ক। অতএব কোন রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। দুই অঙ্কের অন্তর এক হইলে অর্থাৎ অ—ই =১ হইলে অক—ইক = ক।

ক প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি অনুপাতীয় রাশিকে বিলোম অর্থাৎ অগ্র পশ্চাৎ করিলেও তাহারা অনুপাতীয় থাকিবে।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে খ : ক :: ঘ : গ হইবে। অক এবং অগ ক এবং গ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং ইখ ও ইঘ খ এবং ঘ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। অতএব ক : খ :: গ : ঘ একারণ অক ইখ হইতে যদি ন্যূন হয় তবে অগ ও ইঘ হইতে ন্যূন হইবে (৫।৫ সং) অর্থাৎ ইখ যদি অক হইতে অধিক হয় তবে ইঘ ও অগ হইতে অধিক হইবে। ঐ কারণ যদি ইখ = অক, তবে ইঘ = অগ এবং যদি ইখ < অক, তবে ইঘ < অগ হইবে। অপর ইখ এবং ইঘ খ এবং ঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য এবং অক ও অগ ক ও গ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অতএব খ : ক :: ঘ : গ। অতএব চারি অনুপাতীয় ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

খ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে অপবর্ত্ত্য অথবা অংশ তৃতীয় যদি চতুর্থের সেই অপবর্ত্ত্য বা অংশ হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ তৃতীয়ের চতুর্থ সহিত সেই নিষ্পত্তি সম্বন্ধ হইবে।

প্রথমতঃ অক এবং অখ যদি ক এবং খ রাশির সম অপবর্ত্ত্য হয় তবে অক : ক :: অখ : খ। অক এবং অখ রাশির ই পরিমাণ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং ক ও খ রাশির উ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। ঐ সকল অপবর্ত্ত্য ক্রমশঃ

nm be greater than p, nmB is greater than pB; therefore, when nmA is greater than pA, nmB is greater than pB. In the same manner, if $nm\text{A}=p\text{A}$, $nm\text{B}=p\text{B}$, and if $nm\text{A}<p\text{A}$, $nm\text{B}<p\text{B}$. Now, nmA, nmB are any equimultiples of mA and mB; and pA, pB are any equimultiples of A and B, therefore, mA : A : : mB : B (Def. 5. 5.).

Next, let C be the same part of A that D is of B; then A is the same multiple of C that B is of D, and therefore as has been demonstrated, A : C : : B : D, and inversely (A. 5.), C : A : : D : B. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

If the first be to the second as the third to the fourth; and if the first be a multiple or a part of the second, the third is the same multiple or the same part of the fourth.

Let A : B : : C : D, and first, let A be a multiple of B; C is the same multiple of D; that is, if $\text{A}=m\text{B}$, $\text{C}=m\text{D}$.

Take of A and C equimultiples by any number as 2, viz. 2A and 2C; and of B and D, take equimultiples by the number $2m$, viz. $2m$B, $2m$D (3. 5.); then because $\text{A}=m\text{B}$, $2\text{A}=2m\text{B}$; and since A : B : : C : D, and since $2\text{A}=2m\text{B}$, therefore $2\text{C}=2m\text{D}$ (def. 5. 5.), and

ইঅক, উক, ইঅখ, এবং উখ হইবে। অপর ইঅক যদি উক হইতে অধিক হয় তবে ইঅ ও উ হইতে অধিক হইবে এবং ইঅ যদি উ হইতে অধিক হয় তবে ইঅখ উখ হইতে অধিক হইবে অতএব যে স্থলে ইঅক উক হইতে অধিক সে স্থলে ইঅখ উখ হইতে অধিক। তদ্রূপ যদি ইঅক = উক তবে ইঅখ = উখ এবং যদি ইঅক < উক তবে ইঅখ < উখ। অপর ইঅক ইঅখ দুই রাশি অক এবং অখ রাশির সম অপবর্ত্ত্য এবং উক ও উখ দুই রাশি ক এবং খ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অতএব অক : ক :: অখ : খ (৫।৫ সং)।

দ্বিতীয়তঃ গ রাশি যে পরিমাণে ক রাশির অংশ ঘ সেই পরিমাণে খ রাশির অংশ কল্পনা কর তাহাতে ক যে পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্ত্য খ সেই পরিমাণে ঘ রাশির অপবর্ত্ত্য হইবে তন্নিমিত্ত পূর্ব্বোক্ত ন্যায়েতে ক : গ :: খ : ঘ এবং (৫। ক প্রতিজ্ঞানুসারে) বিলোম নিষ্পত্তি সম্বন্ধে গ : ক :: ঘ : খ। অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

গ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ চতুর্থ সহিত তৃতীয়ের সেই নিষ্পত্তি সম্বন্ধ হইলে প্রথম রাশি যদি কিয়ৎপরিমাণে দ্বিতীয়ের অপবর্ত্ত্য বা অংশ হয় তবে তৃতীয়ও সেই পরিমাণে চতুর্থের অপবর্ত্ত্য বা অংশ হইবেক।

ক : খ :: গ : ঘ কল্পনা কর এবং প্রথমতঃ ক রাশি খ রাশির অপবর্ত্ত্য হউক। গ সেই পরিমাণে ঘ রাশির অপবর্ত্ত্য হইবে অর্থাৎ যদি ক = অখ তবে গ = অঘ।

ক এবং গ রাশির কিয়ৎপরিমাণে (অর্থাৎ দ্বি সংখ্যক অঙ্ক পরিমাণে) সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ ২ক এবং ২গ এবং খ ও ঘ রাশির ২অ পরিমাণে সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ ২অখ ও ২অঘ (৫।৩) অতএব ক = অখ একারণ ২ক = ২অখ। অপর ক : খ :: গ : ঘ এবং ২ক = ২অখ

$C = mD$, that is, C contains D m times, or as often as A contains B.

Next, Let A be a part of B, C is the same part of D. For, since A : C : : C : D, inversely (A. 5.) B : A : : D : C. But A being a part of B, B is a multiple of A, and therefore, as is shewn above, D is the same multiple of C, and therefore C is the same part of D that A is of B. Therefore &c. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

Equal magnitudes have the same ratio to the same magnitude, and the same has the same ratio to equal magnitudes.

Let A and B be equal magnitudes, and C any other; A : C : : B : C.

Let mA, mB be any equimultiples of A and B; and nC any multiple of C.

Because A = B, $mA = mB$ (Ax. 1, 5); wherefore, if mA be greater than nC, mB is greater than nC; and if $mA = nC$, $mB = nC$; if $mA \angle nC$, $mB \angle nC$. But mA and mB are any equimultiples of A and B, and nC is any multiple of C, therefore (Def. 5. 5.) A : C : : B : C.

Again, if A=B; C : A : : C : B; for, as has been proved, A : C : : B : C, and inversely (A. 5.), C : A : : C : B. Therefore, &c. Q. E. D.

একারণ ২গ = ২অঘ (৫।৫ সং) অতএব গ = অঘ সুতরাং গ রাশি অ পরিমাণে ঘ রাশির ব্যাপক অর্থাৎ যে পরিমাণে ক রাশি খ রাশির ব্যাপক সেই পরিমাণে গ রাশি ঘ রাশির ব্যাপক।

দ্বিতীয়তঃ ক রাশি খ রাশির অংশ কল্পনা কর তাহাতে গ রাশি ঘ রাশির তদ্রূপ অংশ হইবে, কেননা ক : খ :: গ : গ তন্নিমিত্ত বিলোম নিষ্পত্তিতে (৫। ক প্রতিজ্ঞা) খ : ক :: ঘ : গ। অপর ক রাশি খ রাশির অংশ হওয়াতে খ রাশি ক রাশির অপবর্ত্ত্য অতএব পূর্ব্বোক্ত উপপত্ত্যানুসারে ঘ রাশি গ রাশির ঐ রূপ অপবর্ত্ত্য সুতরাং ক রাশি খ রাশির যে অংশ গ রাশিও ঘ রাশির সেই অংশ। অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন এক রাশির সহিত সমান২ রাশির নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সমান হয় এবং সমান২ রাশি সম্বন্ধে এক রাশির নিষ্পত্তিও সমান হয়।

ক এবং খ সমান২ রাশি এবং গ অন্য কোন রাশি কল্পনা কর তাহাতে ক : গ :: খ : গ উপপন্ন হইবে।

অক এবং অখ ক এবং খ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য এবং ইগ গ রাশির কোন অপবর্ত্ত্য হউক।

ক = খ একারণ অক = অখ (৫।১ স্বতঃ সাধ্য) অতএব অক যদি ইগ হইতে অধিক হয় তবে অখ রাশিও ইগ হইতে অধিক হইবে এবং যদি অক = ইগ তবে অখ = ইগ অথবা যদি অক < ইগ তবে অখ < ইগ। অপর অক এবং অখ ক এবং খ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য এবং ইগ গ রাশির কোন অপবর্ত্ত্য অতএব (৫।৫ সং) ক : গ :: খ : গ।

অপিচ যদি ক = খ তবে গ : ক :: গ : খ কেননা পূর্ব্ব উপপত্ত্যানুসারে ক : গ :: খ : গ সুতরাং (৫। ক প্রতিজ্ঞা) গ : ক :: গ : খ অতএব কোন এক রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. VIII. THEOR.

Of unequal magnitudes, the greater has a greater ratio to the same than the less has; and the same magnitude has a greater ratio to the less than it has to the greater.

Let A + B be a magnitude greater than A, and C a third magnitude; A + B has to C a greater ratio than A has to C; and C has a greater ratio to A than it has to A + B.

Let m be such a number that mA and mB are each of them greater than C; and let nC be the least multiple of C that is not less* than mA + mB; then nC—C, that is, (n—1) C (1. 5) will be less than mA + mB, or mA + mB, that is, m (A + B) is greater than (n—1), C. But because nC is not less than mA + mB, and C less than mB, nC—C is greater than mA or mA, is less than nC—C, that is, than (n—1)C. Therefore the multiple of A + B by m exceeds the multiple of C by n—1, but the multiple of A by m does not exceed the multiple of C by n—1; therefore A + B has a greater ratio to C than A has to C (Def. 7. 5.)

---

* The original text is, "Let nC be the least multiple of C that *exceeds* mA + mB"; but in that case it does not necessarily follow that (n—1)C is *less* than mA + mB; it might be equal.

৮ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

বিষম রাশির মধ্যে বৃহত্তরের কোন রাশি সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক্ষুদ্রতরের সেই রাশি সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক; এবং কোন রাশির বৃহত্তর সম্বন্ধীয় যে নিষ্পত্তি তাহা ক্ষুদ্রতর সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অল্প।

ক + খ রাশি ক রাশির বৃহত্তর কল্পনা কর এবং গ অন্য কোন রাশি কল্পনা কর। ক + খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক এবং গ রাশির ক সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক + খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক।

অ এমত এক অঙ্ক কল্পনা কর যেন অক অখ প্রত্যেকে গ অপেক্ষা অধিক হয়। অপর অক + অখ হইতে অন্যূন* অথচ গ রাশির ক্ষুদ্রতম অপবর্ত্ত্য এমত এক রাশি কল্পনা কর যথা ইগ তাহাতে ইগ—গ অর্থাৎ (ই—১)গ (১. ৫.) অক + অখ হইতে ন্যূন হইবে অথবা অক + অখ অর্থাৎ অ (ক + খ) রাশি (ই—১)গ হইতে অধিক হইবে। অধিকন্তু অগ রাশি অক + অখ রাশি হইতে অন্যূন এবং গ রাশি অখ হইতে ন্যূন একারণ ইগ—গ > অক অর্থাৎ অক < ইগ—গ সুতরাং অক < (ই—১)গ অতএব অ পরিমাণে ক + খ রাশির অপবর্ত্ত্য অ—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্ত্য হইতে অধিক কিন্তু অ পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্ত্য ই—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্ত্য হইতে অধিক নহে অতএব (৫।৭ সং) ক + খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক রাশির গ সম্বন্ধীয় হইতে অধিক।

* মূল গ্রন্থে লিখিত আছে "অধিক" তাহাতে প্রমাণে দোষ আইসে কেননা তাহা হইলে (ই — ১) গ রাশি অক + অখ হইতে নিতান্ত ন্যূন হইত না, সমান হইতেও পারিত।

Again, because the multiple of C by $n-1$, exceeds the multiple of A by m, but does not exceed the multiple of A + B by m, C has a greater ratio to A than it has to A + B (Def. 7. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

Magnitudes which have the same ratio to the same magnitude are equal to one another; and those to which the same magnitude has the same ratio are equal to one another.

If A : C : : B : C; A=B.

For, if not, let A be greater than B; then, because A is greater than B, two numbers, m and n, may be found, as in the last proposition, such that mA shall exceed nC, while mB does not exceed nC. But because A : C : : B : C; if mA exceed nC, mB must also exceed nC (def. 5. 5.); and it is also shewn that mB does not exceed nC, which is impossible. Therefore A is not greater than B; and in the same way it is demonstrated that B is not greater than A; therefore A is equal to B.

Next, let C : A : : C : B; A = B. For, by inversion (A. 5.), A : C : : B : C; and therefore by the first case, A = B.

PROP. X. THEOR.

That magnitude, which has a greater ratio than another has to the same magnitude, is the greater of the two

অপিচ ই—১ পরিমাণে গ রাশির অপবর্ত্ত্য অ পরিমাণে ক রাশির অপবর্ত্ত্য হইতে অধিক কিন্তু অ পরিমাণে ক + খ রাশির অপবর্ত্ত্য হইতে অধিক নহে একারণ গ রাশির ক সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক + খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি হইতে অধিক। অতএব বিষম ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যেং রাশির এক রাশির সহিত সমান নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সে সকল রাশি পরস্পর সমান এবং যেং রাশির সহিত এক রাশির সমান নিষ্পত্তি সম্বন্ধ সে সকল রাশিও পরস্পর সমান।

যদি ক : গ :: খ : গ তবে ক = খ।

কেননা যদি এমত না হয় তবে ক > খ কল্পনা কর। অতএব ক রাশি খ হইতে অধিক একারণ পূর্ব্বোক্ত প্রতিজ্ঞার ন্যায় অ এবং ই এমত দুই অঙ্ক কল্পনা করা যাইতে পারে যে অক ইগ রাশির অধিক অথচ অখ ইগ রাশির অনধিক হয়। অপর ক : গ :: খ : গ হওয়াতে অক যদি ইগ হইতে অধিক হয় তবে অখও ইগ হইতে অধিক হইবে (৫।৫) কিন্তু অখ ইগ রাশির অনধিক দর্শিত হইয়াছে অতএব ইহা অনুপপন্ন হইল। সুতরাং ক রাশি খ রাশির অধিক নহে। তদ্রূপ খ রাশি ক রাশির অধিক নহে ইহাও উপপন্ন হইবে অতএব ক খ পরস্পর সমান।

অপিচ গ : ক :: গ : খ কল্পনা কর তাহাতে ক = খ হইবে কেননা বিলোম নিষ্পত্তি দ্বারা (৫। ক) ক : গ :: খ : গ সুতরাং পূর্ব্বোক্ত উপপত্ত্যনুসারে ক = খ।

১০ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই রাশির মধ্যে যে রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ অন্য এক রাশি সম্বন্ধে অধিক সেই রাশি বৃহত্তর এবং যাহার সম্বন্ধে

And that magnitude, to which the same has a greater ratio than it has to another magnitude, is the less of the two.

If the ratio of A to C be greater than that of B to C; A is greater than B.

Because A : C $>$ B : C, two numbers m and n may be found, such that mA $>$ nC, and mB $<$ nC (Def. 7. 5.) Therefore, also mA $>$ mB, and A $>$ B (Ax. 4. 5.)

Again, Let C : B $>$ C : A; then B $<$ A. For two numbers, m and n may be found, such that mC $>$ nB, and mC $<$ nA (Def. 7. 5.) Therefore, since nB is less, and nA greater than the same magnitude mC, nB $<$ nA, and B $<$ A. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

Ratios that are equal to the same ratio are equal to one another.

If A : B : : C : D; and also C : D : : E : F; then A : B : : E : F.

Take mA, mC, mE, any equimultiples of A, C, and E; and nB, nD, nF, any equimultiples of B, D, and F. Because A : B : : C : D, if mA $>$ nB, mC $>$ nD (Def. 5. 5.); but if mC $>$ nD, mE $>$ nF (Def 5. 5.), because C : D : : E : F; therefore if mA $>$ nB, mE $>$ nF. In the same manner, if mA $=$ nB, mE $=$ nF; and if mA $<$ nB, mE $<$ nF. Now, mA, mE are any

অন্য এক রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ অধিক সেই রাশি উভয়ের মধ্যে ন্যূন।

যদি গ সম্বন্ধে ক রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ খ রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ অপেক্ষা অধিক হয় তবে খ হইতে ক অধিক।

ক : গ $>$ খ : গ একারণ এমত দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক যথা অ ই কল্পনা করা যায় যে অক $>$ ইগ অথচ অখ $<$ ইগ হইবে (৫।৭ সং) অতএব অক $>$ অখ এবং ক $>$ খ (৫।৪ স্বতঃ সাধ্য)।

অপিচ গ : খ $>$ গ : ক কল্পনা কর তাহাতে খ $<$ ক হইবে কেননা এমত দুই সংখ্যাত্মক অঙ্ক যথা অ ই কল্পনা করা যাইতে পারে যাহাতে অগ $>$ ইখ অথচ অগ $<$ ইক হইবে (৫।৭ সং) অতএব অগ এক রাশির সম্বন্ধে ইখ ন্যূন এবং ইক অধিক হওয়াতে ইখ $<$ ইক সুতরাং খ $<$ ক। অতএব দুই রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১১ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

যেহ নিষ্পত্তি পরিমাণ অন্য কোন সামান্য নিষ্পত্তি পরিমাণের সমান তাহারা পরস্পরও সমান।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ :: ঙ : চ তবে ক : খ :: ঙ : চ হইবে।

ক, গ, ঙ, রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য যথা অক, অখ, অঙ, এবং খ, ঘ, চ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য যথা ইখ, ইঘ, ইঙ, কল্পনা কর। ক : খ :: গ : ঘ হওয়াতে যদি অক $>$ ইখ হয় তবে অগ $>$ ইঘ হইবে (৫।৫ সং) কিন্তু যদি অগ $>$ ইঘ তবে অঙ $>$ ইচ হইবে (৫।৫ সং) কেননা গ : ঘ :: ঙ : চ অতএব অক $>$ ইখ হইলে অঙ $>$ ইচ হইবে। তদ্রূপ অক = ইখ হইলে অঙ = ইচ, এবং অক $<$ ইখ

equimultiples whatever of A and E; and nB, nF any whatever of B and F; therefore A : B : : E : F, (Def. 5. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

If any number of magnitudes be proportionals, as one of the antecedents is to its consequent, so are all the antecedents, taken together, to all the consequents.

If A : B : : C : D, and C : D : : E : F; then also, A : B : : A+C+E : B+D+F.

Take mA, mC, mE any equimultiples of A, C, and E; and nB, nD, nF, any equimultiples of B, D, and F. Then, because A : B : : C : D, if $mA > nB$, $mC > nD$ (Def. 5. 5.); and when $mC > nD$, $mE > nF$, because C : D : : E : F. Therefore, if $mA > nB$, $mA + mC + mC > nB + nD + nF$. In the same manner, if $mA = nB$, $mA + mC + mE = nB + nD + nF$; and if $mA < nB$, $mA + mC + mE < nB + nD + nF$. Now, $mA + mC + mE = m(A+C+E)$ (Cor. 1. 5.), so that mA and $mA + mC + mE$ are any equimultiples of A, and of A+C+E. And for the same reason, nB, and $nB + nD + nF$ are any equimultiples of B, and of B+D+F; therefore (Def. 5. 5.) A : B : : A+C+E : B+D+F. Therefore, &c. Q. E. D.

হইলে অঙ < ইচ উপপন্ন হইবে। অধিকন্তু অক এবং অঙ ক এবং ঙ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য এবং ইখ ও ইচ খ এবং চ রাশির কোন সম অপবর্ত্ত্য অতএব ক : খ :: ঙ : চ। অতএব যেং নিষ্পত্তি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

১২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কতিপয় রাশি অনুপাতীয় হইলে কোন অগ্রবর্ত্তি রাশির তদনুবর্ত্তি রাশি সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি সমুদয় অগ্রবর্ত্তির সমুদয় অনুবর্ত্তি সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ :: ঙ : চ হয় তবে ক : খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ হইবে।

ক, গ, ঙ রাশির অক, অগ, অঙ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং খ, ঘ, চ, রাশির ইখ, ইঘ, ইচ, সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। অপর ক : খ :: গ : ঘ একারণ অক > ইখ হইলে অগ > ইঘ হইবে (৫।৫ সং) এবং অগ > ইঘ হইলে অঙ > ইচ হইবে কেননা গ : ঘ :: ঙ : চ। অতএব অক > ইখ হইলে অক + অগ + অঙ > ইখ + ইঘ + ইচ হইবে। তদ্রূপ অক = ইখ হইলে অক + অগ + অঙ = ইখ + ইঘ + ইচ হইবে। তথা অক < ইখ হইলে অক + অগ + অঙ < ইখ + ইঘ + ইচ হইবে। অনন্তর অক + অগ + অঙ = অ (ক + গ + ঙ) (৫।১) সুতরাং অক এবং অক + অগ + অঙ ক্রমশঃ ক এবং ক + গ + ঙ রাশির সম অপবর্ত্ত্য। তদ্রূপ ইখ এবং ইখ + ইঘ + ইচ ক্রমশঃ খ এবং খ + ঘ + চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অতএব (৫।৫ সং) ক : খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ। অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XIII. THEOR.

If the first have to the second the same ratio which the third has to the fourth, but the third to the fourth, a greater ratio than the fifth has to the sixth; the first has also to the second a greater ratio than the fifth has to the sixth.

If $A : B :: C : D$; but $C : D > E : F$; then also, $A : B > E : F$.

Because $C : D > E : F$, there are two numbers m and n, such that $mC > nD$, but $mE < nF$ (Def. 7. 5.) Now, if $mC > nD$, $mA > nB$, because $A : B :: C : D$. Therefore $mA > nB$, and and $mE < nF$, wherefore, $A : B > E : F$ (Def. 7. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

If the first have to the second the same ratio which the third has to the fourth, and if the first be greater than the third, the second shall be greater than the fourth; if equal, equal; and if less, less.

If $A : B :: C : D$; then if $A > C$, $B > D$; if $A = C$, $B = D$; and if $A < C$, $B < D$.

First, $A > C$; then $A : B > C : B$ (8. 5.), but $A : B :: C : D$, therefore $C : D > C : B$ (13. 5.), and therefore $B > D$ (10. 5.)

In the same manner, it is proved, that if $A = C$, $B = D$; and if $A < C$, $B < D$. Therefore, &c. Q. E. D.

১৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণ যদি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় কিন্তু তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যদি পঞ্চমের ষষ্ঠ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তিও পঞ্চমের ষষ্ঠ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি অপেক্ষা অধিক হইবে।

যদি ক:খ:: গ: ঘ এবং গ: ঘ > ঙ: চ তবে ক: খ > ঙ: চ।

গ: ঘ > ঙ: চ হওয়াতে এমত দুই অঙ্ক যথা অ এবং ই পাওয়া যাইবে যাহার গুণনে অগ > ইঘ কিন্তু অঙ ∠ ইচ হইবে (৫।৭ সং) পরন্তু অগ > ইঘ হইলে অক > ইখ হইবে কেননা ক: খ :: গ: ঘ অতএব অক > ইখ এবং অঙ < ইচ সুতরাং ক: খ > ঙ: চ (৫।৭ সং) অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশির দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যদি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় এবং প্রথম যদি তৃতীয় হইতে অধিক হয় তবে দ্বিতীয়ও চতুর্থ হইতে অধিক হইবে তথা যদি সমান হয় তবে সমান আর যদি ন্যূন হয় তবে ন্যূন হইবে।

যদি ক: খ :: গ: ঘ তবে ক > গ হইলে খ > ঘ, ক = গ হইলে খ = ঘ, এবং ক ∠ গ হইলে খ < ঘ হইবে।

প্রথমতঃ ক > গ কল্পনা কর তাহাতে ক. খ > গ: খ (৫। ৮) কিন্তু ক: খ :: গ: ঘ অতএব গ· ঘ > গ· খ (৫।১৩) সুতরাং. খ > ঘ (৫। ১০)

তদ্রূপ ইহাও উপপন্ন হয় যে ক = গ হইলে খ = ঘ, এবং ক < গ হইলে খ < ঘ। অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XV. THEOR.

Magnitudes have the same ratio to one another which their equimultiples have.

If A and B be two magnitudes, and m any number; A : B : : mA : mB.

Because A : B : : A : B (7. 5.); A : B : : A+A : B+B (12. 5.), or A : B : : 2A : 2B. And, in the same manner, since A : B : : 2A : 2B, A : B : : A+2A : B+2B (12. 5.), or A : B : : 3A : 3B; and so on, for all the equimultiples of A and B. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

If four magnitudes of the same kind be proportionals, they will also be proportionals when taken alternately.

If A : B : : C : D, then alternately, A : C : : B : D.

Take mA, mB any equimultiples of A and B, and nC, nD any equimultiples of C and D. Then (15. 5.) A : B : : mA : mB; now A : B : : C : D, therefore (11. 5.) C : D : : mA : mB. But C : D : : nC : nD (15. 5.); therefore mA : mB : : nC : nD (11. 5.); wherefore if $mA > nC$, $mB > nD$ (14. 5.); if $mA = nC$, $mB = nD$, or if $mA < nC$, $mB < nD$; therefore (Def. 5. 5.), A : C : : B : D. Therefore, &c. Q. E. D.

১৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কতিপয় রাশির সম অপবর্ত্ত্যের পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি রাশিরদেরও সেই নিষ্পত্তি।

ক এবং খ দুই রাশি এবং অ কোন সংখ্যাত্মক অঙ্ক কল্পনা কর। ক : খ :: অক : অখ হইবে।

ক : খ :: ক : খ (৫।৭) একারণ ক : খ :: ক + ক : খ + খ অর্থাৎ ক : খ :: ২ক : ২খ তথা ক : খ :: ক + ২ক : খ + ২খ অর্থাৎ ক : খ :: ৩ক : ৩খ। ক এবং খ রাশির যাবদীয় সম অপবর্ত্ত্যের বিষয় তদ্রূপ হয়। অতএব কতিপয় রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সজাতীয় চারি রাশি অনুপাতীয় হইলে তাহারদের বিনিময় নিষ্পত্তি সম্ভাব্য।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে বিনিময়ে ক : গ :: খ : ঘ হইবে।

ক খ রাশির অক অখ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং গ ঘ রাশির ইগ ইঘ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর তাহাতে (৫।১৫) ক : খ :: অক : অখ হইবে, অপর ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫।১১) গ : ঘ :: অক : অখ। অধিকন্তু গ : ঘ :: ইগ : ইঘ সুতরাং অক : অখ :: ইগ : ইঘ অতএব যদি অক > ইগ তবে অখ > ইঘ (৫।১৪) যদি অক = ইগ তবে অখ = ইঘ অথবা যদি অক < ইগ তবে অখ < ইঘ অতএব (৫।৫ সং) ক : গ :: খ : ঘ। অতএব সজাতীয় চারি রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XVII. THEOR.

If Magnitudes, taken jointly, be proportionals, they will also be proportionals when taken separately; that is, if the first, together with the second, have to the second the same ratio which the third, together with the fourth, has to the fourth, the first will have to the second the same ratio which the third has to the fourth.

If $A + B : B :: C + D : D$, then by division $A : B :: C : D$.

Take mA and nB any multiples of A and B, by the numbers m and n; and first let $mA > nB$; to each of them add mB, then $mA + mB > mB + nB$. But $mA + mB = m(A + B)$ (Cor. 1. 5), and $mB + nB = (m+n)B$ (2. Cor. 2. 5.), therefore $m(A+B) > (m+n)B$.

And because $A + B : B :: C+D : D$, if $m(A+B) > (m+n)B$, $m(C+D) > (m + n)D$, or $mC + mD > mD + nD$, that is, taking mD from both, $mC > nD$. Therefore, when mA is greater than nB, mC is greater than nD. In like manner, it is demonstrated, that if $mA = nB$, $mC = nD$, and if $mA < nB$, that $mC < nD$; therefore $A : B :: C : D$. (Def. 5. 5.) Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XVIII. THEOR.

If magnitudes, taken separately, be proportionals, they will also be proportionals, when taken jointly, that is, if the the first be to the second as the third to the

১৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যে২ রাশির মধ্যে যোগ নিষ্পত্তি থাকে তাহারদের মধ্যে অন্তর নিষ্পত্তি ও হইবে অর্থাৎ প্রথম এবং দ্বিতীয় রাশির যোগে দ্বিতীয়ের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি তৃতীয় চতুর্থের যোগে চতুর্থ সম্বন্ধেও যদি সেই নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হইবে।

যদি ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ তবে বিয়োগ দ্বারা ক : খ :: গ : ঘ।

ক এবং খ রাশির অ এবং ই পরিমাণ দুই অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর অর্থাৎ অক ইখ। প্রথমতঃ অক > ইখ কল্পনা কর তাহাতে অখ যোগ করিলে অক + অখ > অখ + ইখ হইবে। অপর অক + অখ = অ (ক + খ) (৫।১ অনু) এবং অখ + ইখ = (অ + ই)খ (৫।২ দ্বিতীয় অনু) অতএব অ (ক + খ) = (অ + ই)খ।

অপিচ ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ একারণ যদি অ (ক + খ) > (অ + ই)খ তবে অ(গ + ঘ) > (অ + ই)ঘ অর্থাৎ অগ + অঘ > অঘ + ইঘ। উভয়তঃ অঘ বিযোগ করিলে অগ > ইঘ অতএব অক ইখ হইতে অধিক হইলে অগ ইঘ হইতে অধিক হয়। তদ্রূপ অক = ইখ হইলে অগ = ইঘ এবং অক < ইখ হইলে অগ < ইঘ উপপন্ন হইবে। অতএব ক : খ :: গ : ঘ। অতএব যে২ রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১৮ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যে২ রাশির মধ্যে অন্তর নিষ্পত্তি থাকে তাহারদের মধ্যে যোগ নিষ্পত্তিও হইবে অর্থাৎ যদি প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে প্রথম এবং দ্বিতীয়ের যোগে দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি

fourth, the first and second together will be to the second, as the third and fourth together to the fourth.

If $A : B :: C : D$, then, by composition, $A + B : B :: C + D : D$.

Take $m(A + B)$ and nB any multiples whatever of $A + B$ and B; and first, let m be greater than n. Then, because $A + B$ is also greater than B, $m(A + B) > nB$. For the same reason, $m(C + D) > nD$. In this case, therefore, that is, when $m > n$, $m(A + B)$ is greater than nB, and $m(C + D)$ is greater than nD. And in the same manner, it may be proved, that when $m = n$, $m(A + B)$ is greater than nB, and $m(C + D)$ greater than nD.

Next, Let $m < n$, or $n > m$, then $m(A + B)$ may be greater than nB, or may be equal to it, or may be less; first, let $m(A + B)$ be greater than nB; then also, $mA + mB > nB$; take mB, which is less than nB, from both, and $mA > nB - mB$, or $mA > (n - m) B$ (6. 5.). But if $mA > (n - m) B$, $mC > (n - m) D$, because $A : B :: C : D$. Now, $(n - m) D = nD - mD$ (6. 5.), therefore $mC > nD - mD$, and adding mD to both, $mC + mD > nD$, that is (1. 5.), $m(C + D) > nD$. If, therefore, $m(A + B) > nB$, $m(C + D) > nD$.

In the same manner, it may be proved, that if $m(A + B) = nB$, $m(C + D) = nD$; and if $m(A + B) < nB$, $m(C + D) < nD$; therefore (Def. 5. 5.), $A + B : B :: C + D : D$. Therefore, &c. Q. E. D.

তৃতীয় এবং চতুর্থের যোগে চতুর্থ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে সংযোগ দ্বারা ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ।

ক + খ এবং খ রাশির অ (ক + খ) এবং ইখ দুই অপবর্ত্ত্য কল্পনা করিয়া প্রথমতঃ অ ই হইতে অধিক কল্পনা কর তাহাতে ক + খ রাশি খ হইতে অধিক হওয়াতে অ (ক + খ) > ইখ। ঐ কারণে অ (গ + ঘ) > ইঘ অতএব অ > ই হইলে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক এবং অ (গ + ঘ) রাশি ইঘ হইতে অধিক হয়। তদ্রূপ অ = ই হইলে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে এবং অ (গ + ঘ) রাশি ইঘ হইতে অধিক হয়।

অপিচ অ < ই অর্থাৎ ই > অ কল্পনা কর তাহাতে অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক অথবা ন্যূন অথবা তত্তুল্য হইবে। প্রথমতঃ অ (ক + খ) রাশি ইখ হইতে অধিক হউক তাহাতে অক + অখ > ইখ। উভয়তঃ ইখ রাশির ন্যূন অখ বিয়োগ করিলে অক > ইখ — অখ অর্থাৎ অক > (ই—অ) খ। অধিকন্তু যদি অক > (অ—ই) খ তবে অগ > (ই—অ) ঘ কেননা ক : খ :: গ : ঘ। অপর (ই—অ) = ইঘ — অঘ (৫।৬) অতএব অগ > ইঘ— অঘ এবং উভয়তঃ অঘ যোগে অগ + অঘ > ইঘ অর্থাৎ (৫।১) অ (গ + ঘ) > ইঘ অতএব অ (ক + খ) > ইখ হইলে অ (গ + ঘ) > ইঘ হয়।

তদ্রূপ যদি অ (ক + খ) = ইখ তবে অ (গ + ঘ) = ইঘ উপপন্ন হইবে এবং যদি অ (ক + খ) < ইখ হয় তবে অ (গ + ঘ) < ইঘ উপপন্ন হইবে অতএব (৫। ৫ সং) ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ। অতএব যেং রাশির মধ্যে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XIX. THEOR.

If a whole magnitude be to a whole, as a magnitude taken from the first, is to a magnitude taken from the other; the remainder will be to the remainder as the whole to the whole.

If A : B : : C : D, and if C be less than A, A—C : B—D : : A : B.

Because A : B : : C : D, alternately (16. 5.), A : C : : B : D; and therefore, by division (17. 5), A—C : C : : B—D : D. Wherefore, again, alternately, A—C : B—D : : C : D, but A : B : : C : D, therefore (11. 5.) A—C : B—D : : A : B. Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. A—C : B—D : : C : D.

PROP. D. THEOR.

If four magnitudes be proportionals, they are also proportionals by conversion, that is, the first is to its excess above the second, as the third to its excess above the fourth.

If A : B : : C : D, by conversion, A : A—B : : C : C—D.

For, since A : B : : C : D, by division (17. 5.), A—B : B : : C—D : D, and inversely (A. 5.), B : A—B : : D : C—D; therefore, by composition (18. 5.), A : A—B : : C : C—D. Therefore, &c. Q. E. D.

১৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন সমুদয় রাশির যদি অন্য কোন সমুদয় রাশি সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি প্রথম হইতে বিযুক্ত কোন রাশির দ্বিতীয় হইতে বিযুক্ত কোন রাশি সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে সমুদয়ের পরস্পর নিষ্পত্তির ন্যায় অবশিষ্টেরও নিষ্পত্তি হইবেক।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং যদি গ ক হইতে ন্যূন হয় তবে ক—গ : খ—ঘ : : ক : খ।

ক : খ :: গ : ঘ একারণ (৫। ১৬) বিনিময় নিষ্পত্তিতে ক : গ .: খ : ঘ সুতরাং অন্তর নিষ্পত্তিতে (৫। ১৭) ক—গ : গ : : খ—ঘ : ঘ পুনশ্চ বিনিময় নিষ্পত্তিতে ক—গ : খ — ঘ :: গ : ঘ পরন্তু ক : খ : : গ: ঘ একারণ (৫। ১১) ক—গ : খ—ঘ : : ক : খ। অতএব কোন সমুদয় রাশির ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান ক—গ : খ—ঘ : :গ : ঘ।

ঘ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি রাশি অনুপাতীয় হইলে তাহারা পরিবর্ত্তনেও অনুপাতীয় হইবে অর্থাৎ প্রথম রাশির দ্বিতীয় বিয়োগাবশিষ্ট সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ বিয়োগাবশিষ্টেরও সেই নিষ্পত্তি হইবে।

যদি ক : খ :: গ : ঘ তবে পরিবর্ত্তনে ক : ক—খ : : গ : গ—ঘ।

কেননা ক : খ : . গ: ঘ একারণ (৫। ১৭) অন্তর নিষ্পত্তিতে ক—খ : খ :: গ— ঘ: ঘ এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে (৫।ক) খ : ক—খ : : ঘ : গ—ঘ অতএব যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮) ক : ক—খ : : গ : গ—ঘ সুতরাং চারি রাশি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

COR. In the same way, it may be proved, that A A + B : : C : C + D.

PROP. XX. THEOR.

If there be three magnitudes, and other three, which, taken two and two, have the same ratio; if the first be greater than the third, the fourth is greater than the sixth; if equal, equal; and if less, less.

If there be three magnitudes, A, B, and C, and other three, D, E, and F; and if A : B : : D : E; and also B : C : : E : F, then if $A > C$, $D > F$; if $A = C$, $D = F$; and if $A < C$, $D < F$.

A,	B,	C,
D,	E,	F.

First, Let $A > C$; then A : B $>$ C : B (8. 5.). But A : B : : D : E, therefore also D : E $>$ C : B (13. 5.) Now B : C : : E : F, and inversely (A. 5.), C : B : : F : E; and it has been shewn that D : E $>$ C : B, therefore D : E $>$ F : E (13. 5.), and consequently $D > F$ (10. 5.)

Next, Let $A = C$; then A : B : : C : B (7. 5.), but A : B : : D : E; therefore, C : B : : D : E, but C : B : : F : E, therefore D : E : : F : E (11. 5.), and $D = F$ (9. 5.). Lastly, let $A < C$; then $C > A$, and because, as was already shewn, C : B : : F : E, and B : A : : E : D;

অনুমান ঐ রূপে ক : ক + খ :: গ : গ + ঘ উপপন্ন হইবে।

---

২০ প্রতিজ্ঞা।

প্রথম পংক্তিতে তিন রাশি এবং দ্বিতীয় পংক্তিতে অপর তিন রাশি কল্পিত হইলে যদি ক্রমশ দুই২ রাশির নিষ্পত্তি পরিমাণ সমান হয় তবে প্রথম রাশি তৃতীয়ের অধিক হইলে চতুর্থ রাশিও ষষ্ঠের অধিক হইবে তথা সমান হইলে সমান এবং ন্যূন হইলে ন্যূন হইবে।

যদি ক খ গ তিন রাশি এবং ঘ ঙ চ অপর তিন রাশি কল্পিত হয় এবং যদি ক : খ : : ঘ : ঙ তথা খ : গ : : ঙ : চ হয় তবে ক > গ হইলে ঘ > চ এবং ক = গ হইলে ঘ = চ আর ক < গ হইলে ঘ < চ হইবে।

ক	খ	গ
ঘ	ঙ	চ

প্রথমতঃ ক > গ কল্পনা কর তাহাতে (৫।৮) ক : খ > গ : খ কিন্তু ক : খ : : ঘ : ঙ সুতরাং (৫।১৩) ঘ : ঙ > গ : খ অপর খ : গ : : ঙ : চ এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে (৫।ক) গ : খ : : চ : ঙ। অপর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে ঘ : ঙ > গ : খ অতএব (৫।১৩) ঘ : ঙ > চ : ঙ সুতরাং ঘ > চ (৫।১০)।

অপিচ ক = গ কল্পনা কর তাহাতে ক : খ : : গ খ (৫।৭) কিন্তু ক : খ : : ঘ : ঙ অতএব গ : খ : : ঘ : ঙ অধিকন্তু গ : খ : : চ : ঙ অতএব ঘ : ঙ : : চ : ঙ (৫।১১) সুতরাং ঘ = চ। অবশেষে ক < গ কল্পনা কর তাহাতে গ > ক হইবে। অপর পূর্ব্বোক্ত প্রমাণানুসারে গ : খ : : চ : ঙ এবং খ : ক : : ঙ : ঘ সুতরাং প্রথম প্রকরণানুসারে যদি গ > ক তবে চ > ঘ অর্থাৎ ক < গ

therefore, by the first case, if $C > A$, $F > D$, that is, if $A < C$, $D < F$. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

If there be three magnitudes, and other three, which have the same ratio taken two and two, but in a cross order; if the first magnitude be greater than the third, the fourth is greater than the sixth; if equal, equal; and if less, less.

If there be three magnitudes, A, B, C, and other three, D, E, and F, such that A : B : : E : F, and B : C : : D : E; if $A > C$, $D > F$, if $A = C$, $D = F$; and if $A < C$, $D < F$.

A,	B,	C,
D,	E,	F,

First, Let $A > C$. Then $A : B > C : B$ (8. 5.), but A : B : : E : F, therefore $E : F > C : B$ (13. 5.). Now, B : C : : D : E, and inversely, C : B : : E : D; therefore $E : F > E : D$ (13. 5.), wherefore $D > F$ (10. 5.)

Next, Let $A = C$. Then (7. 5.) A : B : : C : B; but A : B : : E : F, therefore, C : B : : E : F (11. 5.); but B : C : : D : E, and inversely, C : B : : E : D, therefore (11. 5.), E : F : : E : D, and, consequently, $D = F$ (9. 5.).

Lastly, Let $A < C$. Then $C > A$, and, as was already proved, C : B : : E : D; and B : A : : F : E, therefore, by the first case, since $C > A$, $F > D$, that is, $D < F$. Therefore, &c. Q. E. D.

হইলে ঘ < চ হইবে। অতএব যদি প্রথম পংক্তিতে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

২১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যদি প্রথমতঃ তিন রাশি এবং দ্বিতীয়তঃ অপর তিন রাশি কল্পিত হইলে বিপরীত মুখে দুইং রাশির সমান নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথম রাশি ত্রিতীয়ের অধিক হইলে চতুর্থ রাশিও ষষ্ঠের অধিক হইবে তথা সমান হইলে সমান এবং ন্যূন হইলে ন্যূন হইবে।

যদি ক খ গ তিন রাশি এবং ঘ ঙ চ অপর তিন রাশি কল্পিত হয় এবং যদি ক : খ :: ঙ : চ এবং খ : গ :: ঘ : ঙ হয় তবে ক > গ হইলে ঘ > চ এবং ক = গ হইলে ঘ = চ তথা ক < গ হইলে ঘ < চ হইবে। প্রথমতঃ ক > গ কল্পনা কর তাহাতে

ক	খ	গ
ঘ	ঙ	চ

ক : খ > গ : খ (৫।৮) কিন্তু ক : খ :: ঙ : চ অতএব ঙ : চ > গ : খ (৫।১৩) অপর খ : গ :: ঘ : ঙ সুতরাং বিলোম নিষ্পত্তিতে গ : খ :: ঙ : ঘ অতএব ঙ : চ > ঙ : ঘ (৫।১৩) একারণ ঘ > চ (৫।১০)

দ্বিতীয়তঃ ক = গ কল্পনা কর তাহাতে ক : খ :: গ : খ (৫।৭) কিন্তু ক : খ :: ঙ : চ অতএব গ : খ :: ঙ : চ (৫।১১) অপর খ : গ :: ঘ : ঙ এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে গ : খ :: ঙ : ঘ অতএব (৫।১১) ঙ : চ :: ঙ : ঘ সুতরাং চ = ঘ।

অবশেষে ক < গ কল্পনা কর তাহাতে গ > ক হইবে এবং পূর্ব প্রমাণানুসারে গ : খ :: ঙ : ঘ এবং খ : ক :: চ : ঙ সুতরাং প্রথম প্রকরণ প্রমাণ গ > ক হওয়াতে চ > ঘ অর্থাৎ ঘ < চ। অতএব যদি প্রথমতঃ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XXII. THEOR.

*If there be any number of magnitudes, and as many others, which, taken two and two in order, have the same ratio; the first will have to the last of the first magnitudes, the same ratio which the first of the others has to the last.**

First, Let there be three magnitudes, A, B, C, and other three, D, E, F, which, taken two and two in order, have the same ratio, viz. A : B : : D : E, and B : C : : E : F; then A : C : : D : F.

Take of A and D any equimultiples whatever, mA, mD; and of B and E any whatever, nB, nE; and of C and F any whatever, qC, qF. Because A : B : : D : E, mA : nB : : mD : nE (4. 5.); and for the same reason, nB : qC : : nE : qF. Therefore (20. 5.), according as mA is greater than qC, equal to it, or less, mD is greater than qF, equal to it, or less; but mA, mD are any equimultiples of A and D; and qC, qF are any equimultiples of C and F; therefore (Def. 5. 5.), A : C : : D : F.

A,	B,	C,
D,	E,	F
mA,	nB,	qC
mD,	nE,	qF

Again, Let there be four magnitudes, and other four which, taken two and two in order, have the same ratio, viz. A : B : : E : F; B : C : : F : G; C : D : : G : H, then A : D : : E : H.

* N. B.—This proposition is usually cited by the words "ex æquali," or "ex æquo."

২২ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

প্রথমতঃ কতিপয় রাশি এবং দ্বিতীয়তঃ তৎসংখ্যক অপর কতিপয় রাশি থাকিলে যদি ক্রমশঃ দুই২ রাশির মধ্যে সমান নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথম শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে *।

যদি ক খ গ তিন রাশি এবং ঘ ঙ চ অপর তিন রাশির মধ্যে ক্রমশঃ দুই২ করিয়া লইলে সমান নিষ্পত্তি হয় অর্থাৎ যদি ক : খ :: ঘ : ঙ এবং খ : গ :: ঙ : চ তবে ক : গ :: ঘ : চ। ক এবং ঘ রাশির অক অঘ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং খ ও ঙ রাশির ইখ ও ইঙ দুই সম অপবর্ত্ত্য তথা গ ও চ রাশির উগ উচ দুই সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর। ক : খ :: ঘ : ঙ একারণ অক : ইখ :: অঘ ; ইঙ (৫।৪)

ক	খ	গ
ঘ	ঙ	চ
অক	ইখ	উগ
অঘ	ইঙ	উচ

তদ্রূপ ইখ : উগ :: ইঙ : উচ। অতএব (৫।২০) অক রাশি উগ রাশির ন্যূনাতিরিক্ত অথবা সমান হইলে অঘ রাশি উচ রাশিরও ন্যূনাতিরিক্ত অথবা সমান হইবে কিন্তু অক অঘ ক এবং ঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য এবং উগ উচ গ এবং চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য সুতরাং (৫।৫সং) ক : গ :: ঘ : চ।

অপিচ দুই শ্রেণীস্থ চারি২ রাশি কল্পিত হউক যাহারদের দুই২ করিয়া গ্রহণ করিলে পরস্পর ক্রমশঃ সমান নিষ্পত্তি হয়। যথা ক : খ :: ঙ : চ এবং খ : গ :: চ : ছ ও গ : ঘ :: ছ : জ তাহাতে ক : ঘ :: ঙ : জ উপপন্ন হইবে।

ক	খ	গ	ঘ
ঙ	চ	ছ	জ

* এই প্রতিজ্ঞা "ন্যায়ান্যতঃ" এই শব্দে উক্ত হইয়া থাকে।

For since A, B ; C, are three magnitudes, and E, F, G, other three, which, taken two and two, have the same ratio, by the foregoing case, A : C : : E : G. And because also C : D : : G : H, by that same case, A : D : : E : H. In the same manner is the demonstration extended to any number of magnitudes. Therefore, &c. Q. E. D.

A, B, C, D,
E, F, G, H,

PROP. XXIII. THEOR.

*If there be any number of magnitudes, and as many others, which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio : the first will have to the last of the first magnitudes the same ratio which the first of the others has to the last**

First, Let there be three magnitudes, A, B, C, and other three, D, E, and F, which taken two and two in a cross order, have the same ratio, viz. A : B : : E : F, and B : C : : D : E, then A : C : : D : F.

Take of A, B, and D, any equimultiples mA, mB, mD ; and of C, E, F, any equimultiples nC, nE, nF.

Because A : B : : E : F, and because also A : B : : mA : mB (15. 5.), and E : F : : nE nF ; therefore, mA : mB : : nE : nF (11. 5.). Again, because B : C : : D : E, mB : nC : : mD : nE (4. 5.) : and it has been just shewn, that mA : mB : : nE : nF ; therefore, if $mA > nC$, $mD > nF$ (21. 5.) ; if $mA = nC$, $mD = nF$; and if $mA < nC$,

A,	B,	C,
D,	E,	F,
mA,	mB,	nC
mD,	nE,	qF

* N. B.—This proposition is usually cited by the words "ex æquali in proportione Perturbata ; or, "ex æquo inversely."

কেমনা ক খ গ এবং ঙ চ ছ দুই শ্রেণীস্থ তিন২ রাশির মধ্যে দুই২ গ্রহণ করিলে সমান নিষ্পত্তি হয় একারণ পূর্ব্বোক্ত প্রকরণানুসারে ক : গ : : ঙ : ছ এবং গ : ঘ : : ছ : জ হওয়াতে ঐ প্রকরণানুসারে ক : ঘ : : ঙ : জ। এবং রাশির সংখ্যা যত হউক উপপত্তি ঐরূপ হইবে। অতএব যদি প্রথমত: ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

২৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যদি সমান সংখ্যক কতিপয় রাশি দুই শ্রেণীস্থ হইলে বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয় তবে প্রথম শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ আদ্য রাশির অন্তিম সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে*।

প্রথমতঃ ক খ গ এবং ঘ ঙ চ দুই শ্রেণীস্থ তিন২ রাশি কল্পিত হউক যাহাদের বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয় অর্থাৎ ক : খ : : ঙ : চ এবং খ : গ : : ঘ : ঙ তাহাতে ক : গ : : ঘ : চ উপপন্ন হইবে

ক	খ	গ
ঘ	ঙ	চ
অক	অখ	ইগ
অঘ	ইঙ	ইচ

ক খ ঘ রাশির অক অখ অঘ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর এবং গ ঙ চ রাশির ইগ ইঙ ইচ সম অপবর্ত্ত্য কল্পনা কর।

ক : খ : : ঙ : চ এবং ক : খ : : অক : অখ (৫।১৫) তথা ঙ : চ : : ইঙ : ইচ একারণ অক : অখ : : ইঙ : ইচ (৫।১১) পুনশ্চ খ : গ : : ঘ : ঙ একারণ অখ : ইগ : : অঘ : ইঙ (৫।৪) এবং সম্প্রতি উপপন্ন হইয়াছে অক : অখ : ইঙ :

* এই প্রতিজ্ঞা "বিপরীতক্রমে সামান্যেতঃ" এই শব্দে উক্ত হইয়া থাকে।

$mD \angle nF$. Now, mA and mD are any equimultiples of A and D, nC, nF, any equimultiples of C and F; therefore, A : C : : D : F (Def. 5. 5.).

Next, Let there be four magnitudes, A, B, C, and D, and other four, E, F, G and H, which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio, viz. A : B : : G : H ; B : C : : F : G, and C : D : : E : F, then A : D : : E : H. For, since A, B, C are three magnitudes and F, G, H, other three, which, taken two and two, in a cross order, have the same ratio, by the first case, A : C : : F : H. But C : D : : E : F, therefore, again, by the first case, A : D : : E : H. In the same manner, may the demonstration be extended to any number of magnitudes. Therefore, &c. Q. E. D.

A,	B,	C,	D,
E,	F,	G,	H,

PROP. XXIV. THEOR.

If the first has to the second the same ratio which the third has to the fourth ; and the fifth to the second, the same ratio which the sixth has to the fourth ; the first and fifth, together, shall have to the second, the same ratio which the third and sixth together, have to the fourth.

Let A : B : : C : D, and also E : B : : F : D, then A + E : B : : C + F : D.

Because E : B : : F : D, by inversion, B : E : D : F. But, by hypothesis, A : B : : C : D, therefore, ex æquali (22. 5.), A : E : : C : F, and, by composition (18. 5.), A + E : E : : C + F : F. And again, by hypo-

ইচ অতএব অক > ইগ হইলে অঘ > ইচ হইবে (৫।২১) এবং অক = ইগ হইলে অঘ = ইচ তথা অক < ইগ হইলে অঘ < ইচ হইবে অপর অক অঘ ক এবং ঘ রাশির সম অপবর্ত্ত্য এবং ইগ ইচ গ এবং চ রাশির সম অপবর্ত্ত্য অতএব ক : গ :: ঘ : চ (৫।৫ সং)।

অপিচ ক খ গ ঘ এবং ঙ চ ছ জ দুই শ্রেণীস্থ চারি২ রাশি কল্পিত হউক যাহারদের বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে পরস্পর সমান নিষ্পত্তি হয়। যথা ক : খ :: ছ : জ। খ : গ :: চ : ছ। গ : ঘ :: ঙ : চ। তাহাতে ক : ঘ :: ঙ : জ উপপন্ন হইবে। কেননা

ক	খ	গ	ঘ
ঙ	চ	ছ	জ

ক খ গ এবং চ ছ জ দুই শ্রেণীস্থ তিন২ রাশির মধ্যে বিপরীত ক্রমে দুই২ করিয়া লইলে সমান নিষ্পত্তি হয় একারণ প্রথম প্রকরণানুসারে ক : গ :: চ : জ অধিকন্তু গ : ঘ :: ঙ : চ অতএব পুনশ্চ প্রথম প্রকরণানুসারে ক : ঘ :: ঙ : জ। এবং রাশির সংখ্যা যত হউক উপপত্তি ঐ রূপ হইবে।

২৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

প্রথম রাশির যদি দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তৃতীয়ের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং পঞ্চমের দ্বিতীয় সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যদি ষষ্ঠের চতুর্থ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় তবে প্রথম এবং পঞ্চমের একত্র যোগে দ্বিতীয়ের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি তৃতীয় এবং ষষ্ঠের যোগে চতুর্থের সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে।

যদি ক : খ :: গ : ঘ এবং ঙ : খ :: চ : ঘ কল্পিত হয় তবে ক + ঙ : খ :: গ + চ : ঘ।

ঙ : খ :: চ : ঘ অতএব বিলোম নিষ্পত্তিতে খ : ঙ :: ঘ : চ অপর ক : খ :: গ : ঘ কল্পিত হইয়াছে অতএব সামান্যতঃ (৫।২২) ক : ঙ :: গ : চ এবং যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮)

thesis, E : B : : F : D, therefore, ex æquali (22. 5.), A + E : B : : C + F : D. Therefore, &c. Q. E D.

PROP E. THEOR.

If four magnitudes be proportionals, the sum of the first two is to their difference as the sum of the other two to their difference.

Let A : B : : C : D; then if A > B,
A + B : A— B : : C + D : C—D ; or if A < B,
A + B : B—A : : C + D : D—C,

For, if A > B, then because A : B : : C : D, by division (17. 5.), A—B : B : : C—D : D, and by inversion (A. 5.), B : A—B : : D : C—D. But, by composition (18. 5.) A + B : B : : C + D : D, therefore, ex æquali (22. 5.), A + B : A—B : : C + D : C—D.

In the same manner, if B > A, it is proved, that
A + B : B—A : : C + D : D—C. Therefore, &c
Q. E. D.

PROP. F. THEOR.

Ratios which are compounded of equal ratios, are equal to one another.

Let the ratios of A to B, and of B to C, which compound the ratio of A to C, be equal, each to each, to the ratios of D to E, and E to F, which compound the ratio of D to F; A : C : : D : F.

ক + ঙ : ঙ : : গ + চ : চ। পুনশ্চ ঙ : খ : : চ : ঘ কল্পিত হইয়াছে অতএব সামান্যতঃ ক + ঙ : খ : : গ + চ : ঘ অতএব প্রথম রাশির ইত্যাদি ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

ঙ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি অনুপাতীয় রাশির প্রথমোক্ত দুই রাশির পরস্পর যোগ বিয়োগ করিলে সমুদয়ের অবশিষ্ট সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অপর দুই রাশির ঐরূপ যোগ বিয়োগ করিলে সমুদয়ের অবশিষ্ট সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে।

ক : খ : : গ : ঘ কল্পনা কর তাহাতে যদি ক > খ হয় তবে ক + খ : ক—খ : : গ + ঘ : গ—ঘ অথবা ক < খ হইলে ক + খ : খ—ক : : গ + ঘ : ঘ—গ।

কেননা যদি ক > খ তবে ক : খ : : গ : ঘ একারণ (৫।১৭) অন্তর নিষ্পত্তিতে ক—খ : খ : : গ—ঘ : ঘ সুতরাং বিলোম নিষ্পত্তিতে (৫।ক) খ : ক—খ : : ঘ : গ—ঘ অধিকন্তু যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮) ক + খ : খ : : গ + ঘ : ঘ অতএব সামান্যতঃ (৫।২২) ক + খ : ক—খ : : গ + ঘ : গ—ঘ। এবং ক < খ হইলে তদ্রূপ ক + খ : খ—ক : : গ + ঘ : ঘ—গ উপপন্ন হইবে। অতএব চারি অনুপাতীয় ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

চ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান২ নিষ্পত্তি যোগে যেহ নিষ্পত্তি হয় তাহাও পরস্পর সমান।

ক এবং খ ও খ এবং গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির যোগে ক এবং গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি উৎপন্ন হইতেছে এবং ঘ এবং ঙ ও ঙ এবং চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি যোগে ঘ এবং চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি উৎপন্ন হইতেছে যদি ক রাশির খ সম্বন্ধীয় এবং খ রাশির গ

A,	B,	C,
D,	E,	F,

For, first, If the ratio of A to B be equal to that of D to E, and the ratio of B to C equal to that of E to F, *ex æquali* (22. 5.), A : C :: D : F.

And next, If the ratio of A to B be equal to that of E to F, and the ratio of B to C equal to that of D to E, *ex æquali inversely* (23. 5.), A : C :: D : F. In the same manner, may the proposition be demonstrated, whatever be the number of ratios. Therefore, &c. Q. E. D.

সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ক্রমশঃ ঘ রাশির ঙ সম্বন্ধীয় এবং ঙ রাশির চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় তবে ক : গ :: ঘ : চ।

কেননা প্রথমতঃ যদি ক রাশির খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ঘ রাশির ঙ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি তুল্য হয় এবং খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ঙ রাশির চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির তুল্য হয় তবে সামান্যতঃ (৫।২২) ক : গ :: ঘ : চ।

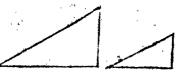
ক	খ	গ
ঘ	ঙ	চ

দ্বিতীয়তঃ যদি ক রাশির খ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ঙ রাশির চ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির তুল্য হয় এবং খ রাশির গ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি ঘ রাশির ঙ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তির সমান হয় তবে (৫।২৩) বিপরীত ক্রমে সামান্যতঃ ক : গ :: ঘ : চ। অপর যত নিষ্পত্তি হউক উপপত্তি ঐ রূপ হইবে। অতএব সমানং নিষ্পত্তি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

পঞ্চমোধ্যায়ঃ সমাপ্তঃ

BOOK VI.

DEFINITIONS.

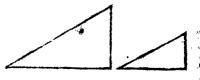
I. SIMILAR *rectilineal figures* are those which have their several angles equal, each to each, and the sides about the equal angles proportionals.

II. Two sides of one figure are said to be *reciprocally proportional* to two sides of another, when one of the sides of the first is to one of the sides of the second, as the remaining side of the second is to the remaining side of the first.

III. A straight line is said to be cut in *extreme and mean ratio*, when the whole is to the greater segment, as the greater segment is to the less.

IV. The *altitude* of any figure is the straight line drawn from its vertex perpendicular to its base.

৬ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১ যে২ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের কোণ সকল ক্রমশঃ সমান এবং সমান২ কোণ সংলগ্ন বাহু পরস্পর অনুপাতীয় সে সকল ক্ষেত্রকে সদৃশ কহা যায়।

২ দুই ক্ষেত্রের মধ্যে প্রথমের এক বাহু দ্বিতীয়ের এক বাহুর সহিত যে নিষ্পত্তি যুক্ত হয় দ্বিতীয়ের অপর বাহু প্রথমের অপর বাহুর সহিত যদি সেই নিষ্পত্তি যুক্ত হয় তবে প্রথমের দুই বাহুকে দ্বিতীয়ের দুই বাহুর সহিত "উভয়তঃ অনুপাতীয়" কহা যায়।

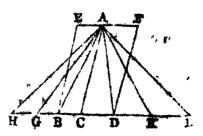
৩ কোন সরল রেখার সমুদায়াংশ যথা বৃহত্তর খণ্ডের সম্বন্ধে, বৃহত্তর খণ্ড তথা লঘুতরের সম্বন্ধে কল্পিত হইলে ঐ সরল রেখাকে অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন কহা যায়।

৪ কোন ক্ষেত্রের শৃঙ্গ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত লম্ব পাত করিলে সেই লম্বকে ক্ষেত্রের উন্নতি কহা যায়।

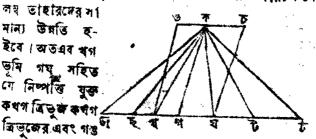
PROP. I. THEOR.

Triangles and parallelograms, of the same altitude, are one to another as their bases.

Let the triangles ABC, ACD, and the parallelograms EC, CF have the same altitude, viz. the perpendicular drawn from the point A to BD: Then, as the base BC is to the base CD, so is the triangle ABC to the triangle ACD, and the parallelogram EC to the parallelogram CF.

Produce BD both ways to the points H, L, and take any number of straight lines BG, GH, each equal to the base BC; and DK, KL, any number of them, each equal to the base CD; and join AG, AH, AK, AL. Then, because CB, BG, GH are all equal, the triangles AHG, AGB, ABC are all equal (38. 1.): Therefore, whatever multiple the base HC is of the base BC, the same multiple is the triangle AHC of the triangle ABC. For the same reason, whatever multiple the base LC is of the base CD, the same multiple is the triangle ALC of the triangle ADC. But if the base HC be equal to the base CL, the triangle AHC is also equal to the triangle ALC (38. 1.); and if the base HC be

greater than the base CL, likewise the triangle AHC is greater than the triangle ALC; and if less, less. Therefore, since there are four magnitudes, viz. the two bases BC, CD, and the two triangles ABC, ACD; and of the base BC and the triangle ABC, the first and third, any equimultiples whatever have been taken, viz. the base

১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজ এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি রেখা এক হইলে তাহারদের ভূমির পরিমাণে পরস্পর অনুপাত হয়।

কখগ কগঘ ত্রিভুজ এবং গঙ ঘচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সমান উন্নত অর্থাৎ ক চিহ্ন হইতে খঘ পর্য্যন্ত লম্বপাত করিলে সেই লম্ব তাহারদের সামান্য উন্নতি হইবে। অতএব খগ ভূমি গঘ সহিত যে নিষ্পত্তি যুক্ত কখগ ত্রিভুজ কগঘ ত্রিভুজের এবং গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সহিত সেই নিষ্পত্তি যুক্ত।

খঘ রেখাকে উভয় পার্শ্বে জ এবং ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং খগ ভূমির সমান খছ ছজ রেখা ছেদ কর তথা গঘ ভূমির সমান ঘট টঠ রেখা ছেদ কর এবং কছ কজ কট কঠ সংযুক্ত কর। অপর গখ খছ ছজ পরস্পর সমান হওয়াতে কখগ কছখ কজছ ত্রিভুজ সকল পরস্পর সমান (১৩৮) অতএব জগ রেখা যৎপরিমাণে খগ রেখার অপবর্ত্ত্য কজগ ত্রিভুজও সেই পরিমাণে কখগ ত্রিভুজের অপবর্ত্ত্য। তদ্রূপ গঠ রেখা যৎপরিমাণে গঘ রেখার অপবর্ত্ত্য কঠগ ত্রিভুজও সেই পরিমাণে কগঘ ত্রিভুজের অপবর্ত্ত্য। অধিকন্তু জগ ভূমি গঠ ভূমির সমান হইলে কজগ ত্রিভুজও কগঠ ত্রিভুজের সমান হইবে (১৩৮) এবং জগ গঠ ভূমির অধিক হইলে কজগ ত্রিভুজও কগঠ ত্রিভুজের অধিক হইবে তথা ভূমি ন্যূন হইলে ত্রিভুজও ন্যূন হইবে। খগ গঘ দুই ভূমি এবং কখগ কগঘ দুই ত্রিভুজ এই চারি রাশির মধ্যে প্রথম এবং তৃতীয়ের

HC, and the triangle AHC; and of the base CD and triangle ACD, the second and fourth, have been taken any equimultiples whatever, viz. the base CL and triangle ALC; and, since it has been shewn, that if the base HC be greater than the base CL, the triangle AHC is greater than the triangle ALC; and if equal, equal; and if less, less: Therefore (Def. 5. 5.), as the base BC is to the base CD, so is the triangle ABC to the triangle ACD.

And because the parallelogram CE is double the triangle ABC (41. 1.), and the parallelogram CF double the triangle ACD, and because magnitudes have the same ratio which their equimultiples have (15. 5.), as the triangle ABC is to the triangle ACD, so is the parallelogram EC to the parallelogram CF. And because it has been shewn, that, as the base BC is to the base CD, so is the triangle ABC to the triangle ACD, and as the triangle ABC to the triangle ACD, so is the parallelogram EC to the parallelogram CF; therefore, as the base BC is to the base CD, so is (11. 5.) the parallelogram EC to the parallelogram CF. Wherefore, "*triangles*," &c. Q. E. D.

COR. From this it is plain, that *triangles and parallelograms that have equal altitudes, are to one another as their bases.*

(অর্থাৎ খগ ভূমি এবং কখগ ত্রিভুজের) জগ এবং কজগ সম অপবর্ত্ত্য এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের অর্থাৎ গঘ ভূমির ও কগঘ ত্রিভুজের গঠ এবং কগঠ সম অপবর্ত্ত্য কল্পিত হইয়াছে এবং এমত উপপন্ন হইয়াছে যে জগ ভূমি গঠ ভূমির অধিক হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজের অধিক হইবে ও জগ গঠ সমান হইলে কজগ কগঠ সমান হইবে তথা ভমি ন্যূন হইলে ত্রিভুজও ন্যূন হইবে অতএব (৫।৫ সং) খগ ভূমি গঘ ভূমির সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তিযুক্ত কখগ ত্রিভুজও কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট।

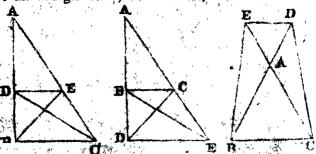
অপিচ গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ এবং গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কগঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ (১।৪১) এবং কতিপয় রাশির সম অপবর্ত্ত্যের পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি রাশিদিগের পরস্পর সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি (৫।১৫) অতএব কখগ ত্রিভুজ কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট। অপর পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে খগ ভূমি গঘ ভূমির সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ধারণ করে কখগ ত্রিভুজও কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি ধারণ করে এবং কখগ ত্রিভুজ কগঘ ত্রিভুজের সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি যুক্ত অতএব (৫।১১) খগ ভূমি গঘ ভূমির সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ধারণ করে গঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্রও গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি ধারণ করে। অতএব ত্রিভুজ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। ইহাতে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে ত্রিভুজ এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি সমান হইলে তাহারদের ভূমির পরিমাণে পরস্পর অনুপাত হয়।

Let the figures be placed so as to have their bases in the same straight line; and having drawn perpendiculars from the vertices of the triangles to the bases, the straight line which joins the vertices is parallel to that in which their bases are (33. 1.), because the perpendiculars are both equal and parallel to one another. Then, if the same construction be made as in the proposition, the demonstration will be the same.

PROP. II. THEOR.

If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the other sides, or the other sides produced, proportionally: And if the sides, or the sides produced, be cut proportionally, the straight line which joins the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle.

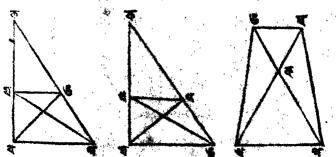
Let DE be drawn parallel to BC, one of the sides of the triangle ABC; BD is to DA, as CE to EA.

Join BE, CD; then the triangle BDE is equal to the triangle CDE (37. 1.), because they are on the

ত্রিভুজ এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্র এমত করিয়া স্থাপন কর যে তাহারদের ভূমি এক সরল রেখায় থাকে এবং ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্বপাত কর তাহাতে শৃঙ্গ সংযোজক রেখা ভূমির সমানান্তরাল হইবে (১।৩৩) কেননা লম্ব রেখা সকলি সমান ও সমানান্তরাল। পরে পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত করিলে উপপত্তিও তাদৃশী হইবে।

২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের এক বাহুর সমানান্তরাল ভাবে সরল রেখা নিষ্কাস্য করিলে তাহা ত্রিভুজের মধ্যে অন্য দুই বাহুকে অথবা ত্রিভুজের বাহিরে, বর্দ্ধিত দুই বাহুকে অনুপাতীয় রূপে ছেদ করিবে, এবং দুই বাহু ত্রিভুজের মধ্যে অথবা বাহিরে অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন হইলে ছেদ চিহ্ন সংযোজক রেখা অবশিষ্ট বাহুর সমানান্তরাল হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমানান্তরাল ভাবে ঘঙ রেখা কল্পিত হউক খঘ রেখার ঘক সহিত যৎপরিমাণে নিষ্পত্তি গঙ রেখার ঙক সহিত সেই পরিমাণে নিষ্পত্তি হইবে।

খঙ গঘ সংযুক্ত কর অতএব খঘঙ এবং গঘঙ দুই ত্রিভুজ ঘঙ এক ভূমির উপরিস্থ এবং খগ ঘঙ সমানান্তরাল রেখার

same base DE, and between the same parallels DE, BC: but ADE is another triangle, and equal magnitudes have, to the same, the same ratio (7. 5.); therefore, as the triangle BDE to the triangle ADE, so is the triangle CDE to the triangle ADE; but as the triangle BDE to the triangle ADE, so is (1. 6,) BD to DA, because, having the same altitude, viz. the perpendicular drawn from the point E to AB, they are to one another as their bases; and, for the same reason, as the triangle CDE to the triangle ADE, so is CE to EA. Therefore, as BD to DA, so is CE to EA (11. 5.).

Next, let the sides AB, AC of the triangle ABC, or these sides produced, be cut proportionally in the points D, E; that is, so that BD be to DA, as CE to EA, and join DE; DE is parallel to BC.

The same construction being made, because as BD to DA, so is CE to EA; And as BD to DA, so is the triangle BDE to the triangle ADE (1. 6.); and as CE to EA, so is the triangle CDE to the triangle ADE; therefore the triangle BDE is to the triangle ADE, as the triangle CDE to the triangle ADE; that is, the triangles BDE, CDE have the same ratio to the triangle ADE; and therefore (9. 5.) the triangle BDE is equal to the triangle CDE: And they are on the same base DE; but equal triangles on the same base are between the same parallels (39. 1,); there-

মধ্যস্থ হওয়াতে তাহারা পরস্পর সমান (১।৩৭) অধিকন্তু কঘঙ অন্য এক ত্রিভুজ এবং সমান২ রাশির সামান্য রাশির সম্বন্ধে সমান নিষ্পত্তি হয় (৫।৭) অতএব যৎপরিমাণে খঘঙ ত্রিভুজের কঘঙ সহিত নিষ্পত্তি গঘঙ ত্রিভুজের কঘঙ সহিত সেই পরিমাণে নিষ্পত্তি হইবে কিন্তু খঘঙ ত্রিভুজের কঘঙ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘক রেখার সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি (৬।১) কেননা ঐ দুই ত্রিভুজের উন্নতি রেখা এক অর্থাৎ ঙ বিন্দু হইতে কখ রেখার লম্ব, একারণ তাহারদের ভুমি পরিমাণে পরস্পর অনুপাত। তদ্রূপ যৎপরিমাণে গঘঙ ত্রিভুজের কঘঙ সহিত নিষ্পত্তি গঙ রেখার সেই পরিমাণে ঙক সহিত নিষ্পত্তি অতএব (৬।১১) খঘ রেখার ঘক সহিত যে নিষ্পত্তি পরিমাণ গঙ রেখার ঙক সহিত সেই নিষ্পত্তি পরিমাণ।

দ্বিতীয়তঃ কখগ ত্রিভুজের কখ কগ বাহু ত্রিভুজের মধ্যে থাকিয়া অথবা বাহিরে বর্দ্ধিত হইয়া ঘ এবং ঙ বিন্দুতে অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন হউক অর্থাৎ খঘ রেখার ঘক সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ গঙ রেখার ঙক সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি পরিমাণ হউক তাহাতে ঘঙ খগ সমানান্তরাল উপপন্ন হইবে।

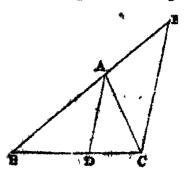
পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত কল্পনা কর। অপর খঘ ঘক সম্বন্ধে যে অনুপাত গঙ ঙক সম্বন্ধেও সেই অনুপাত এবং খঘ ঘক সম্বন্ধে যে অনুপাত খঙঘ ঘঙক ত্রিভুজ সম্বন্ধেও সেই অনুপাত (৬।১) তথা গঙ ঙক সম্বন্ধে যে অনুপাত গঘঙ ঘঙক সম্বন্ধেও সেই অনুপাত অতএব খঙঘ ঘঙক ত্রিভুজ সম্বন্ধে যে অনুপাত গঘঙ ঘঙক সম্বন্ধেও সেই অনুপাত অর্থাৎ ঘঙক ত্রিভুজ সম্বন্ধে খঙঘ গঘঙ দুই ত্রিভুজের নিষ্পত্তি সমান সুতরাং (৫।৯) খঙঘ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সমান। অধিকন্তু শেষোক্ত দুই ত্রিভুজ ঘঙ এক ভুমির উপরিস্থ আছে এবং সমান২

fore DE is parallel to BC. Wherefore, "*if a straight line,*" &c. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

If the vertical angle of a triangle be bisected by a straight line which also cuts the base; the segments of the base shall have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another: And if the segments of the base have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another, the straight line drawn from the vertex to the point of section bisects the vertical angle.

Let the vertical angle BAC, of any triangle ABC, be divided into two equal angles by the straight line AD; BD is to DC as BA to AC.

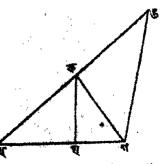
Through the point C draw CE parallel (31. 1.) to DA, and let BA produced meet CE in E. Because the straight line AC meets the parallels AD, EC, the angle ACE is equal to the alternate angle CAD (29. 1.): But CAD, by the hypothesis, is equal, to the angle BAD; wherefore BAD is equal to the angle ACE. Again, because the straight line BAE meets the parallels AD, EC, the exterior angle BAD is equal to the interior opposite angle ABC: But the angle ACE has been proved equal to the angle BAD; therefore also ACE is equal to the

ত্রিভুজ এক ভূমির উপর হইলে একই সমানান্তরালের মধ্যে থাকে (১। ৩৯) একারণ ঘঙ খগ সমানান্তরাল। অতএব ত্রিভুজের এক বাহুর ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

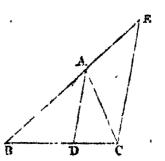
ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হয় এবং সেই সরল রেখা যদি ভূমিকে ছিন্ন করে তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ভূমির দুই খণ্ডের পরস্পর সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি হইবে, এবং অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ভূমির দুই খণ্ডের পরস্পর সম্বন্ধে যদি সেই নিষ্পত্তি হয় তবে ভূমির ছেদ চিহ্ন হইতে ত্রিভুজ শৃঙ্গ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে সেই রেখা শৃঙ্গস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখগ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ খকগ কোণ কঘ সরলরেখা দ্বারা দুই সমান ভাগে বিভক্ত হউক। খঘ রেখার ঘগ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি খক রেখার কগ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি।

গ বিন্দু দিয়া গঙ রেখা ঘক রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান (১।৩১) এবং খক রেখা বর্দ্ধিত হইয়া ঙ বিন্দুতে গঙ রেখায় সংলগ্ন হউক। কঘ ঙগ সমানান্তরাল রেখার উপর কগ রেখার সম্পাত হইয়াছে একারণ কগঙ কোণ অপর পার্শ্বস্থ গকঘ কোণের সমান (১।২৯)। অধিকন্তু গকঘ ঘকখ কোণ সমান কল্পিত হইয়াছে সুতরাং ঘকখ কোণ কগঙ কোণ সমান। অপর কঘ ঙগ

সমানান্তরাল সরল রেখার উপর খকঙ সরল রেখার সম্পাত

angle AEC, and consequently the side AE is equal to the side (6. 1.) AC. And because AD is drawn parallel to one of the sides of the triangle BCE, viz. to EC, BD is to DC, as BA to AE (2. 6.); but AE is equal to AC: therefore, as BD to DC, so is BA to AC (7. 5.)

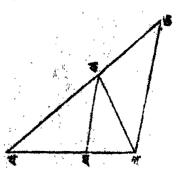
Next, Let BD be to DC, as BA to AC, and join AD; the angle BAC is divided into equal angles, by the straight line AD.

The same construction being made: because, as DB to DC, so is BA to AC; and as BD to DC, so is BA to AE (2. 6.), becaus AD is parallel to EC, refore AB is to AC, AB to AE (11. 5.): Consequently AC is equal to AE (9. 5.), and the angle AEC is therefore equal to the angle ACE

(5. 1.) But the angle AEC is equal to the exterior opposite angle BAD; and the angle ACE is equal to the alternate angle CAD (29. 1.). Wherefore also the angle BAD is equal to the angle CAD: Therefore the angle BAC is cut into two equal angles by

হইয়াছে তন্নিমিত্ত খকঘ বহিস্থ কোণ কঙগ অন্তরস্থ সম্মুখ-বর্ত্তি কোণের সমান পরন্তু কগঙ কোণ খকঘ সমান উপপন্ন হইয়াছে অতএব কগঙ এবং কঙগ পরস্পর সমান সুতরাং কঙ কগ দুই বাহুও সমান (১।৬)। অপর কঘ সরল রেখা খগঙ ত্রিভুজের গঙ বাহুর সমানান্তরাল হওয়াতে খক কঙ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট খঘ ঘগ সম্বন্ধেও সেই নিষ্পত্তি যুক্ত হইবে (৬।২) এবং কঙ কগ সমান হওয়াতে খক রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিতও সেই নিষ্পত্তি (৫।৭) উপপন্না হইল।

অপিচ খক রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিত সেই নিষ্পত্তি কল্পিত হউক তাহাতে কঘ সংযুক্ত করিলে তদ্দ্বারা খকগ কোণ দ্বিখণ্ডিত উপপন্ন হইবে।

পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত কর। অতএব খক রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিত সেই নিষ্পত্তি এবং কঘ ঙগ সমানান্তরাল প্রযুক্ত (৬।২) খক রেখার কঙ সহিত যে নিষ্পত্তি খঘ রেখার ঘগ সহিত সেই নিষ্পত্তি একারণ (৫।১১) খক রেখার কগ সহিত যে নিষ্পত্তি খক রেখার কঙ সহিতও সেই নিষ্পত্তি উপপন্ন হইল সুতরাং কগ কঙ পরস্পর সমান (৫।৯) তন্নিমিত্ত কগঙ এবং কঙগ কোণও পরস্পর সমান (১।৫) অধি-কন্তু কঘ ঙগ সমানান্তরাল প্রযুক্ত খকঘ বহিস্থ কোণ কঙগ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণের সমান এবং কগঙ কোণ অপর পার্শ্বস্থ গকঘ সমান (১।২৯) অতএব খকঘ কোণ ঘকগ সমান সুতরাং খকগ কোণ কঘ সরল রেখার দ্বারা দুই সমান ভাগে বিভক্ত সপ্র-

the straight line AD. Therefore, if the vertical angle, &c. Q. E. D.

PROP. A. THEOR.

If the exterior angle of a triangle be bisected by a straight line which also cuts the base produced; the segments between the bisecting line and the extremities of the base have the same ratio which the other sides of the triangle have to one another: And if the segments of the base produced have the same ratio which the other sides of the triangle have; the straight line, drawn from the vertex to the point of section bisects the exterior angle of the triangle.

Let the exterior angle CAE of any triangle ABC, be bisected by the straight line AD which meets the base produced in D; BD is to DC, as BA to AC.

Through C draw CF parallel to AD (31. 1.); and because the straight line AC meets the parallels AD, FC, the angle ACF is equal to the alternate angle CAD (29. 1.): But CAD is equal to the angle DAE (Hyp.); therefore also DAE is equal to the angle ACF. Again,

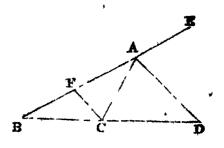
মাণ হইল। অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

ক প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই সরল রেখা যদি বর্দ্ধিত ভূমিকে ছিন্ন করে তবে অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখা এবং ভূম্যগ্রের মধ্যস্থিত দুই সরল রেখার পরস্পর সম্বন্ধে সেই নিষ্পত্তি হইবে। তথা বর্দ্ধিত ভূমি কোন স্থলে ছিন্ন হইলে ছেদ চিহ্ন এবং ভূম্যগ্রের মধ্যস্থিত দুই সরল রেখার পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি অন্য দুই বাহুর পরস্পর সম্বন্ধে যদি সেই নিষ্পত্তি হয় তবে ছেদ চিহ্ন হইতে শৃঙ্গ পর্য্যন্ত সরল রেখা নিষ্কাস্য করিলে তদ্দ্বারা বহিস্থ কোণ দ্বিখণ্ডিত হইবে।

কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ গকঙ কোণ কঘ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত রূপে কল্পিত হউক এবং বর্দ্ধিত ভূমির ঘ চিহ্নে কঘ রেখার সম্পাত হউক তাহাতে খক যথা কগ সম্বন্ধে খঘ তথা ঘগ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

গ বিন্দু দিয়া গচ সরল রেখা কঘ রেখার সমানান্তরাল করিয়া নিষ্কাসন কর (১।৩১)। কঘ চগ সমানান্তরাল রেখার উপর কগ রেখার সম্পাত হইতেছে একারণ চগক কোণ অপর পার্শ্বস্থ গকঘ কোণ সমান (১।২৯) অধিকন্তু গকঘ কোণ ঘকঙ কোণ সমান কল্পিত হইয়াছে অতএব কগচ কোণ ঘকঙ সমান। অপর চগ কঘ সমানান্তরালের উপর চকঙ রেখা সম্পাত হইতেছে এনিমিত্ত ঘকঙ বহিস্থ কোণ কচগ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণ সমান হইবে কিন্তু ঘকঙ কোণ কগচ সমান সপ্রমাণ হইয়াছে অতএব কগচ কচগ দুই কোণ পরস্পর

because the straight line FAE meets the parallels AD, FC, the exterior angle DAE is equal to the interior opposite angle CFA: But the angle ACF has been proved to be equal to the angle DAE; therefore also the

angle ACF is equal to the angle CFA, and consequently the side AF is equal to the side AC (6. 1.), and because AD is parallel to FC, a side of the triangle BCF, BD is to DC, as BA to AF (2. 6.), but AF is equal to AC; therefore as BD is to DC so is BA to AC

Now, Let BD be to DC, as BA to AC, and join AD; the angle CAD is equal to the angle DAE.

The same construction being made, because BD is to DC, as BA to AC; and also BD to DC, as BA to AF (2. 6.); therefore BA is to AC, as BA to AF (11. 5.); wherefore AC is equal to AF (9. 5.), and the angle AFC equal (5. 1.) to the angle ACF: But the angle AFC is equal to the exterior angle EAD, and the angle ACF to the alternate angle CAD; therefore also EAD is equal to the angle CAD. Wherefore, if the exterior, &c., Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

The sides about the equal angles of equiangular triangles are proportionals; and those which are opposite to the equal angles are homologous sides; that is, are the antecedents or consequents of the ratios.

সমান সুতরাং কগ কচ রেখাও পরস্পর সমান (১।৬)। পুনশ্চ কঘ রেখা খগচ ত্রিভুজের গচ বাহুর সমানান্তরাল একারণ (৬।২) খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে খক তথা কচ সম্বন্ধে। পরন্তু কচ কগ সমান অতএব খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে খক তথা কগ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল।

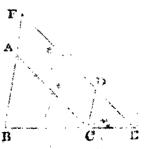
অপিচ খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে খক তথা কগ সম্বন্ধে কল্পিত হউক তাহাতে কঘ সংযুক্ত করিলে গকঘ কোণ ঘকঙ সমান উপপন্ন হইবে।

পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত কর। খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে খক তথা কগ সম্বন্ধে কল্পিত হইয়াছে এবং (৬।২) খঘ যথা ঘগ সম্বন্ধে খক তথা কচ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইতেছে অতএব (৫।১১) খক যথা কগ সম্বন্ধে খক তথা কচ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল সুতরাং কগ রেখা কচ সমান (৫।৯) এবং কচগ কোণ কগচ কোণ সমান (১।৫) অধিকন্তু কচগ কোণ বহিস্থ ঘকঙ সমান এবং কগচ কোণ অপর পার্শ্বস্থ গকঘ কোণ সমান অতএব গকঘ এবং ঘকঙ কোণ পরস্পর সমান উপপন্ন হইল। অতএব ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান কোণি ত্রিভুজ সকলের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু পরস্পর অনুপাতীয়, এবং সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু পরস্পর সবর্ণীয় অর্থাৎ তাহারা নিষ্পত্তি সম্বন্ধে অগ্রবর্ত্তি অথবা পশ্চাদ্বর্ত্তি হইবে।

Let ABC, DCE be equiangular triangles, having the angle ABC equal to the angle DCE, and the angle ACB to the angle DEC, and consequently (32. 1.) the angle BAC equal to the angle CDE; the sides about the equal angles of the triangles ABC, DCE are proportionals, and those are the homologous sides which are opposite to the equal angles.

Let the triangle DCE be placed, so that its side CE may be contiguous to BC, and in the same straight line with it: and because the angles ABC, ACB are together less than two right angles (17. 1.), ABC, and DEC, which is equal to ACB, are also less than two right angles; wherefore BA, ED produced shall meet (Cor. 29. 1.); let them be produced and meet in the point F; and because the angle ABC is equal to the angle DCE, BF is parallel (28. 1.) to CD. Again, because the angle ACB is equal to the angle DEC, AC is parallel to FE (28. 1.) Therefore FACD is a parallelogram; and consequently AF is equal to CD, and AC to FD (34. 1.): And because AC is prrallel to FE, one of the sides of the triangle FBE, BA : AF : : BC : CE (2. 6.): but AF is equal to CD; therefore (7. 5.) BA : CD : : BC : CE; and alternately BA : BC : : DC : CE (16. 5.): Again, because CD is parallel to BF, BC : CE : : FD : DE (2. 6.): but FD is equal to AC; therefore BC : CE : : AC : DE; and alternately, BC : CA : : CE : ED.

কখগ ঘগঙ দুই সমান২ কোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজ কল্পনা কর তাহার মধ্যে কখগ কোণ ঘগঙ কোণের এবং কগখ কোণ ঘঙগ কোণের সমান আর খকগ কোণ সুতরাং (১।৩২) গঘঙ কোণের সমান। এস্থলে কখগ ঘগঙ ত্রিভুজের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় এবং সমান২ কোণের সম্মুখবর্ত্তি বাহু সবর্গীয় হইবে।

ঘগঙ ত্রিভুজ এমত্প্রকারে স্থাপিত কর যেন গঙ বাহু খগ বাহুর অগ্রে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত ক্রমশ এক সরল রেখা হয়। অপর কখগ এবং কগখ দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের ন্যূন (১।১৭), এবং ঘঙগ কগখ কোণের সমান হওয়াতে কখগ ঘঙগ দুই কোণও একত্র দুই সম কোণের ন্যূন হইবে সুতরাং খক ঙঘ দুই সরল রেখা বর্দ্ধিত হইলে কোন স্থানে একত্র সংলগ্ন হইবে (১।২৯ অনুমান) চ চিহ্নে তাহারদের সম্পাত হউক। কখগ কোণ ঘগঙ সমান একারণ চখ এবং ঘগ

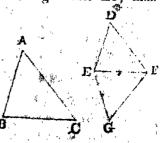
পরস্পর সমানান্তরাল (১।২৮) এবং কগখ কোণ ঘঙগ সমান একারণ কগ ও চঙ পরস্পর সমানান্তরাল সুতরাং কগঘচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র এবং কগ চঘ তথা কচ গঘ পরস্পর সমান (১।৩৪)। অপর কগ সরল রেখা চখঙ ত্রিভুজের চঙ বাহুর সমানান্তরাল একারণ খক : কচ :: খগ : গঙ (৬।২) পরন্তু কচ এবং গঘ পরস্পর সমান অতএব (৫।৭) খক : গঘ :: খগ : গঙ এবং বিনিময় নিষ্পত্তিতে (৫।১৬) খক : খগ :: গঘ : গঙ। পুনশ্চ গঘ খচ পরস্পর সমানান্তরাল একারণ (৬।২) খগ : গঙ :: চঘ : ঘঙ পরন্তু চঘ কগ পরস্পর সমান তন্নিমিত্ত খগ : গঙ

Therefore, because it has been proved, that AB : BC : : DC : CE ; and BC : CA : : CE : ED, *ex æquali*, BA : AC : : CD : DE. Therefore, "*the sides*", &c. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

If the sides of two triangles, about each of their angles, be proportionals, the triangles shall be equiangular, and have their equal angles opposite to the homologous sides.

Let the triangles ABC, DEF, have their sides proportionals, so that AB is to BC, as DE to EF ; and BC to CA, as EF to FD ; and consequently, *ex æquali*, BA to AC, as ED to DF ; the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF, and their equal angles are opposite to the homologous sides, viz. the angle ABC being equal to the angle DEF, and BCA to EFD, and also BAC to EDF.

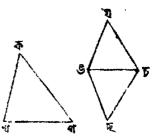
At the points E, F, in the straight line EF, make (23. 1.) the angle FEG equal to the angle ABC, and the angle EFG equal to BCA ; wherefore the remaining angle BAC is equal to the remaining angle EGF (32. 1.), and the triangle ABC is therefore equiangular to

the triangle GEF and consequently they have the sides opposite to the equal angles proportionals (4. 6.) Wherefore

:: কগ : ঘঙ এবং বিনিময় নিষ্পত্তিতে খগ : কগ :: গঙ : ঘঙ। অতএব কখ : খগ :: গঘ : গঙ এবং খগ : কগ :: গঙ : ঘঙ এই হেতুক সামান্যতঃ খক : কগ :: গঘ : ঘঙ। অতএব সমান কোণি ত্রিভজ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু যদি ক্রমশঃ অনুপাতীয় হয় তবে তাহারা সমান২ কোণ বিশিষ্ট এবং সমান২ কোণ সবর্গীয় বাহুর সম্মুখস্থ হইবে।

কখগ ঘঙচ ত্রিভুজের বাহু অনুপাতীয রূপে কল্পনা কর অর্থাৎ কখ যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ তথা ঙচ সম্বন্ধে এবং খগ যথা গক সম্বন্ধে ঙচ তথা চঘ সম্বন্ধে এবং সুতরাং (সামান্যতঃ) খক যথা কগ সম্বন্ধে ঙঘ তথা ঘচ সম্বন্ধে জ্ঞান কর, তাহাতে কখগ ঘঙচ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে এবং সবর্গীয় বাহুর সম্মুখস্থ কোণ পরস্পর সমান হইবে অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ সমান এবং খগক কোণ ঙচঘ সমান তথা খকগ কোণ ঙঘচ সমান হইবে।

ঙচ সরল রেখাস্থ ঙ চ বিন্দুতে চঙছ কোণ কখগ সমান করিয়া এবং ঙচছ কোণ কগখ সমান করিয়া নিষ্কাসন কর (১।২৩) সুতরাং অবশিষ্ট খকগ কোণ ঙছচ কোণ তুল্য (১।৩২) এবং কখগ ত্রিভজ ঙচছ ত্রিভুজের সমান কোণি হইবে এবং তন্নিমিত্ত ঐ দুই ত্রিভুজের সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু অনুপাতীয় হইবে (৬।৪)। অতএব

AB : BC : : GE : EF; but, by supposition,
AB : BC : : DE : EF, therefore,
DE : EF : : GE : EF. Therefore, (11. 5.)
DE and GE have the same ratio to EF, and consequently are equal (9. 5.). For the same reason, DF is equal to FG. And because, in the triangles DEF, GEF, DE is equal to EG, and EF common, and also the base DF equal to the base GF; therefore the angle DEF is equal (8. 1.) to the angle GEF, and the other angles to the other angles, which are subtended by the equal sides (4. 1.). Wherefore the angle DFE is equal to the angle GFE, and EDF to EGF; and because the angle DEF is equal to the angle GEF, and GEF to the angle ABC; therefore the angle ABC is equal to the angle DEF: For the same reason, the angle ACB is equal to the angle DFE, and the angle at A to the angle at D. Therefore the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF. Wherefore "*if the sides*," &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, and the sides about the equal angles proportionals, the triangles shall be equiangular, and shall have those angles equal which are opposite to the homologous sides.

Let the triangles ABC, DEF have the angle BAC in the one equal to the angle EDF in the other, and the sides about those angles proportionals; that is, BA to AC, as ED to DF; the triangles ABC, DEF are equiangular, and have the angle ABC equal to the angle DEF, and ACB to DFE.

কখ : খগ :: ছঙ : ঙচ কিন্তু কল্পনানুসারে

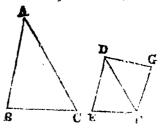
কখ : খগ :: ঘঙ : ঙচ সুতরাং

ঘঙ : ঙচ :: ছঙ : ঙচ অতএব ঘঙ এবং ছঙ রেখার ঙচ সহিত সমান নিষ্পত্তি হওয়াতে তাহারা পরস্পর সমান (৫।৯)। ঐ কারণে ঘচ এবং চছ রেখাও পরস্পর সমান। অপর ঘঙচ ঙছচ এই দুই ত্রিভুজে ঘঙ ঙছ পরস্পর সমান এবং ঙচ সামান্যবাহু আর ঘচ ভূমি ছচ ভূমির তুল্য একারণ (১।৮)ঘঙচ কোণ ছঙচ কোণের সমান এবং সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ কোণও পরস্পর সমান (১।৪) একারণ ঘচঙ কোণ ছচঙ সমান এবং ঙঘচ কোণ ঙছচ সমান। অধিকন্তু ছঙচ কোণ কখগ সমান একারণ কখগ কোণ ঘঙচ সমান। তদ্রূপ কগখ কোণ ঘচঙ এবং ক কোণ ঘ কোণের সমান উপপন্ন হইবে তন্নিমিত্ত কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি। অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি—ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

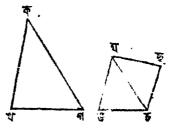
দুই ত্রিভুজের যদি একং কোণ সমান হয় এবং সমানং কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হয় তবে ঐ দুই ত্রিভুজ সমান কোণি হইবে অর্থাৎ সবর্গীয় বাহুর সম্মুখস্থ কোণ সমানং হইবে।

কখগ এবংঘঙচ ত্রিভুজের মধ্যে একটীর খকগ কোণ অন্যটীর ঙঘচ কোণের সমান এবং তৎপার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয়,অর্থাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে ঙঘ তথা ঘচ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কখগ ঘঙচ দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান উপপন্ন হইবে।

At the points D, F, in the straight line DF, make (23. 1.) the angle FDG equal to either of the angles BAC, EDF; and the angle DFG equal to the angle ACB; wherefore the remaining angle at B is equal to the remaining angle at G (32. 1.), and consequently the triangle ABC is equiangular to the triangle DGF; and therefore

BA : AC : : GD : DF (4. 6.) But by hypothesis,
BA : AC : : ED : DF; and therefore
ED : DF : : GD : DF (11. 5.); wherefore ED is equal (9. 5.) to DG; and DF is common to the two triangles EDF, GDF; therefore the two sides ED, DF are equal to the two sides GD, DF; but the angle EDF is also equal to the angle GDF; wherefore the base EF is equal to the base FG (4. 1.), and the triangle EDF to the triangle GDF, and the remaining angles to the remaining angles, each to each, which are subtended by the equal sides: Therefore the angle DFG is equal to the angle DFE, and the angle at G to the angle at E: But the angle DFG is equal to the angle ACB; therefore the angle ACB is equal to the angle DFE, and the angle BAC is equal to the angle EDF (Hyp.); wherefore also the remaining angle at B is equal to the remaining angle at E. Therefore, the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF. Wherefore, "*if two triangles,*" &c. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, and the sides about two other

ঘচ রেখাস্থ ঘ এবং চ বিন্দুতে (১।২৩) চঘছ কোণ খকগ অথবা ঙঘচ কোণের এবং ঘচছ কোণ কগখ কোণের সমান করিয়া নিষ্কাসন কর সুতরাং অবশিষ্ট খ কোণ অবশিষ্ট ছ কোণের সমান (১।৩২)

এবং কখগ ঘচছ দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে

অতএব খক : কগ : : ছঘ : ঘচ (৬।৪)। কিন্তু কল্পনানুসারে খক : কগ : : ঙঘ : ঘচ। অতএব

ঙঘ : ঘচ : : ছঘ : ঘচ (৫।১১) তন্নিমিত্ত ঙঘ এবং ঘছ পরস্পর সমান (৫।৯) এবং ঘচ ঙঘচ চঘছ ত্রিভুজের সামান্য বাহু একারণ ঙঘ ঘচ দুই বাহু ছঘ ঘচ দুই বাহুর সমান অপর ঙঘচ কোণও চঘছ কোণের সমান অতএব (১।৪) ঙচ ভূমি চছ ভূমির এবং ঙঘচ ত্রিভুজ চঘছ ত্রিভুজের সমান এবং সমান২বাহুর সম্মুখস্থ অবশিষ্ট কোণও পরস্পর সমান সুতরাং ঘচছ কোণ ঘচঙ কোণের এবং ছ কোণ ঙ কোণের সমান। অধিকন্তু ঘচছ কোণ কগখ কোণের সমান অতএব ঘচঙ কোণও কগখ কোণের সমান হইবে অপর ঙঘচ কোণ কল্পনা প্রমাণ খকগ সমান তন্নিমিত্ত অবশিষ্ট ঙ কোণ অবশিষ্ট খ কোণের সমান এবং কখগ ত্রিভুজ ঙঘচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইল। অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য

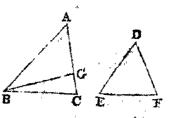
---

৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের যদি এক২ কোণ সমান হয় এবং অন্য এক২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু যদি অনুপাতীয় হয় তবে অবশিষ্ট এক২ কোণ প্রত্যেকে সমকোণের ন্যূন অথবা অন্যূন হইলে দুই

angles proportionals, then, if each of the remaining angles be either less, or not less, than a right angle, the triangles shall be equiangular, and have those angles equal about which the sides are proportionals.

Let the two triangles ABC, DEF have one angle in the one equal to one angle in the other, viz. the angle BAC to the angle EDF, and the sides about two other angles ABC, DEF proportionals, so that AB is to BC, as DE to EF; and, in the first case, let each of the remaining angles at C, F, be less than a right angle: the triangle ABC is equiangular to the triangle DEF, that is, the angle ABC is equal to the angle DEF, and the remaining angle at C to the remaining angle at F.

For, if the angles ABC, DEF, be not equal, one of them is greater than the other: Let ABC be the greater, and at the point B, in the straight line AB, make the angle ABG equal to the angle (23. 1.) DEF: And because the angle at A is equal to the angle at D, and the angle ABG

to the angle DEF; the remaining angle AGB is equal (32. 1.) to the remaining angle DFE: Therefore the triangle ABG is equiangular to the triangle DEF;

wherefore (4. 6.), AB : BG : : DE : EF; but
by hypothesis, DE : EF : : AB : BC,
therefore, AB : BC : : AB : BG (11. 5.)

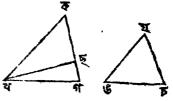
and because AB has the same ratio to each of the lines BC, BG; BC is equal (9. 5.) to BG, and therefore the angle BGC is equal to the angle BCG (5. 1.): But

ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি হইবে এবং যেহ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় সেইহ কোণ সমান হইবে।

কখগ ঘঙচ ত্রিভুজের একহ কোণ অর্থাৎ খকগ এবং ঙঘচ সমান করিয়া কল্পনা কর এবং অন্য একহ কোণের অর্থাৎ কখগ ঘঙচ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় অর্থাৎ কখ যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ তথা ঙচ সম্বন্ধে কল্পনা কর এবং অবশিষ্ট গ চ কোণের প্রত্যেককে প্রথমত সমকোণের ন্যূন কল্পনা কর তাহাতে কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইবে অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান হইবে।

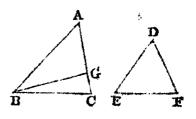
কেননা কখগ এবং ঘঙচ কোণ যদি পরস্পর সমান না হয় তবে তাহারদের একটী অন্যাপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কখগ কোণকে বৃহত্তর কল্পনা করিয়া খ বিন্দুতে কখ রেখায় কখছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান কর

(১।২৩) অপর ক কোণ ঘ কোণের এবং কখছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান হওয়াতে অবশিষ্ট কছখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান (১।৩২) এবং কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি হইবে।

একারণ (৬।৪) কখ : খছ :: ঘঙ : ঙচ কিন্তু
কল্পনাপ্রমাণ ঘঙ : ঙচ :: কখ : খগ
অতএব (৫।১১) কখ : খগ :: কখ : খছ।

কখ রেখার খগ খছ প্রত্যেকের সম্বন্ধে নিষ্পত্তি পরিমাণ সমান হওয়াতে খগ খছ পরস্পর সমান হইবে (৫।৯) সুতরাং খগছ খছগ দুই কোণও সমান (১।৫) অপর কল্পনা প্রমাণ খগছ সমকোণের ন্যূন অতএব খছগ কোণও সমকোণের ন্যূন

the angle BCG is, by hypothesis, less than a right angle; therefore also the angle BGC is less than a right angle, and the adjacent angle AGB must be greater than a right angle (13. 1.). But it was proved, that the angle AGB is equal to the angle at F; therefore the angle at F is greater than a right angle; but by the hypothesis it is less than a right angle, which is absurd. Therefore the angles ABC, DEF are not unequal, that is, they are equal: And the angle at A is equal to the angle at D; wherefore the remaining angle at C is equal to the remaining angle at F: Therefore, triangle ABC is equiangular to the triangle DEF.

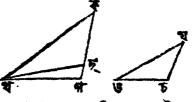
Next, Let each of the angles at C, F be not less than a right angle; the triangle ABC is also, in this case, equiangular to the triangle DEF.

The same construction being made, it may be proved, in like manner, that BC is equal to BG, and the angle at C equal to the angle BGC: But the angle at C is not less than a right angle; therefore the angle BGC is not less than a right angle: Wherefore, two angles of the triangle BGC are together not less than two right angles, which is impossible (17. 1.); and therefore the triangle ABC may be proved to be equiangular to the triangle DEF, as in the first case.

PROP. VIII. THEOR.

In a right angled triangle, if a perpendicular be drawn from the right angle to the base; the triangles on each side of it are similar to the whole triangle, and to one another.

হইবে সুতরাং তৎসংলগ্ন কছখ কোণ সমকোণের অতিরিক্ত হইবে (১।১৩) পরন্তু কছখ কোণ ঘচঙ সমান উপপন্ন হইয়াছে একারণ ঘচঙ কোণও সমকোণের অতিরিক্ত হইবে কিন্তু কল্পনা প্রমাণ তাহা সমকোণ হইতে ন্যূন অতএব এস্থলে যুক্তির বিরোধ হইতেছে। তন্নিমিত্ত কখগ এবং ঘঙচ কোণ পরস্পরের অসমান নহে অর্থাৎ তাহারা পরস্পর সমান এবং ক ও ঘ বিন্দুস্থ কোণও সমান হওয়াতে অবশিষ্ট গ এবং চ বিন্দুস্থ কোণ সমান হইবে অতএব কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি।

দ্বিতীয়তঃ গ চ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে সমকোণের অন্যূন রূপে কল্পিত হউক তাহাতেও কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইবে।

পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত করিয়া কখগ কোণকে ঘঙচ কোণের অসমান কল্পনা করিলে ঐরূপে উপপন্ন হইবেক যে খগ খছ পরস্পর সমান এবং গ কোণ খছগ সমান। পরন্তু গ কোণ সমকোণের অন্যূন সুতরাং খছগ কোণও

সমকোণের অন্যূন হইবে তাহাতে খগছ ত্রিভুজের দুই কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের অন্যূন হয় তাহা অসাধ্য (১।১৭) সুতরাং প্রথম প্রকরণানুসারে কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি উপপন্ন হইতে পারে।

---

৮ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমকোণি ত্রিভুজে সমকোণ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত লম্বপাত করিলে লম্বের দুই পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ সমুদয় ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সদৃশ হইবে।

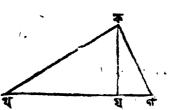
Let ABC be a right angled triangle, having the right angle BAC; and from the point A let AD be drawn perpendicular to the base BC; the triangles ABD, ADC are similar to the whole triangle ABC, and to one another.

Because the angle BAC is equal to the angle ADB, each of them being a right angle, and the angle at B common to the two triangles ABC, ABD; the remaining angle ACB is equal to the remaining angle BAD (32. 1.): therefore the triangle ABC is equiangular to the triangle ABD, and the sides about their equal angles are proportionals (4. 6.);

wherefore the triangles are similar (Def. 1. 6.). In like manner, it may be demonstrated, that the triangle ADC is equiangular and similar to the triangle ABC: and the triangles ABD, ADC, being each equiangular and similar to ABC, are equiangular and similar to one another. Therefore "*in a right angled*," &c. Q. E. D.

COR. From this it is manifest, that *the perpendicular drawn from the right angle of a right angled triangle, to the base, is a mean proportional between the segments of the base*; and also that *each of the sides is a mean proportional between the base and its segment adjacent to that side*. For in the triangles BDA, ADC,

BD : DA :: DA : DC (4. 6.); and in the triangles ABC, BDA, BC : BA :: BA : BD (4. 6.): and in the triangles ABC, ACD, BC : CA :: CA : CD (4. 6.).

কখগ সমকোণি ত্রিভুজ কল্পনা কর খকগ তন্মধ্যস্থ সমকোণ পরে ক বিন্দু হইতে খগ ভূমির উপর লম্ব পাত কর তাহাতে কখঘ

এবং কঘগ ত্রিভুজ সমুদয় কখগ ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সদৃশ্য হইবে।

খকগ কঘখ প্রত্যেকে সমকোণ প্রযুক্ত পরস্পর সমান এবং খ বিন্দুস্থ কোণ কখগ কখঘ উভয়ের সামান্য কোণ একারণ অবশিষ্ট কগখ এবং খকঘ কোণও পরস্পর সমান (১।৩২) অতএব কখগ কখঘ দুই ত্রিভুজ সমান কোণি সুতরাং তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অনুপাতীয় (৬।৪) তন্নিমিত্ত তাহারা সদৃশ (৬।১ সংজ্ঞা) তদ্রূপ কঘগ ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজের সমান কোণি ও সদৃশ উপপন্ন হইবে। অপর কখঘ কগঘ দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের সমান কোণি ও সদৃশ হওয়াতে তাহারা পরস্পরও সমান কোণি এবং সদৃশ উপপন্ন হইল। অতএব সমকোণি ত্রিভুজে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। এস্থলে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমির উপর লম্বপাত করিলে সেই লম্ব ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য অনুপাতীয় হয় এবং ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু ভূমির এবং তৎসংলগ্ন ভূমি খণ্ডের মধ্য অনুপাতীয় কেননা খঘক কঘগ ত্রিভুজে

খঘ : ঘক : : ঘক : ঘগ (৬।৪) এবং কখগ খঘক ত্রিভুজে খগ : খক : : খক : খঘ (৬।৪) এবং কখগ কগঘ ত্রিভুজে খগ : গক : : গক : গঘ (৬।৪)।

PROP. IX. PROB.

From a given straight line to cut off any part required that is, a part which shall be contained in it a given number of times.

Let AB be the given straight line; it is required to cut off from AB, a part which shall be contained in it a given number of times.

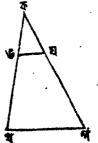
From the point A draw a straight line AC making any angle with AB; and in AC take any point D, and take AC such that it shall contain AD, as oft as AB is to contain the part which is to be cut off from it; join BC, and draw DE parallel to it: then AE is the part required to be cut off.

Because ED is parallel to one of the sides of the triangle ABC, viz. to BC, CD : DA : : BE : EA (2. 6.); and by composition (18. 5.) CA : AD : : BA : AE: But CA is a multiple of AD; therefore (6. 5.) BA is the same multiple of AE, or contains AE the same number of times that AC contains AD; and therefore, whatever part AD is of AC, AE is the same of AB; wherefore, from

৯ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট অংশ ছেদ করিতে হইবে অর্থাৎ তাহাতে নির্দ্দিষ্ট গুণ পরিমাণে ব্যাপ্ত হয় এমত অংশ ছেদ করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা তাহা হইতে এমত কোন অংশ ছেদ করিতে হইবে যাহা নির্দ্দিষ্ট গুণ পরিমাণে তাহাতে ব্যাপ্ত হয়।

ক বিন্দু হইতে কগ সরল রেখা নিষ্কাসন কর তাহাতে কখ সরল রেখা সম্পাতে যে কোন কোণ উৎপন্ন হউক। পরে কগ সরল রেখায় স্বেচ্ছানুসারে ঘ চিহ্ন নির্দ্দেশ করিয়া কগ সরল রেখাকে এবম্প্রকারে বৃদ্ধি কর যেন কখ সরল রেখার উদ্দিশ্য অংশ যে পরিমাণে তাহাতে ব্যাপ্ত কঘ রেখা সেই পরিমাণে কগ রেখাতে ব্যাপ্ত হয়। অনন্তর খগ সংযুক্ত করিয়া ঘঙ তাহার সমানান্তরাল ভাবে নিষ্কাসন কর তাহাতে কঙ কখ রেখার অভীষ্ট অংশ হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমানান্তরাল ভাবে ঘঙ নিষ্কাসিত হইয়াছে এ কারণ (৬।২) গঘ যথা ঘক সম্বন্ধে খঙ তথা ঙক সম্বন্ধে হইবেক সুতরাং যোগ নিষ্পত্তিতে (৫।১৮) গক যথা কঘ সম্বন্ধে খক তথা কঙ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল। অপর গক কঘ রেখার অপবর্ত্ত্য অতএব খক রেখাও সেই পরিমাণে কঙ রেখার অপবর্ত্ত্য হইবে (৫।৬) অর্থাৎ গক রেখা যে পরিমাণে কঘ রেখার ব্যাপক খক রেখাও সেই পরিমাণে কঙ রেখার ব্যাপক হইবে একারণ কঘ রেখা কগ রেখার যে পরিমাণানুযায়ি অংশ কঙ রেখাও কখ রেখার সেই পরিমা-

the straight line AB the part required is cut off. *Which was to be done.*

PROP. X. PROB.

To divide a given straight line similarly to a given divided straight line, that is, into parts that shall have the same ratios to one another which the parts of the divided given straight line have.

Let AB be the straight line given to be divided, and AC the divided line; it is required to divide AB similarly to AC.

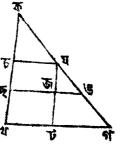
Let AC be divided in the points D, E; and let AB, AC be placed so as to contain any angle, and join BC, and through the points D, E, draw (31. 1.) DF, EG parallel to BC; and through D draw DHK parallel to AB; therefore each of the figures FH, HB, is a parallelogram; wherefore DH is equal (34. 1.) to FG, and HK to GB; and because HE is parallel to KC, one of the sides of the triangle DKC, CE : ED : : KH : HD : (2. 6.) But KH = BG, and HD = GF; therefore CE : ED : : BG : GF. Again, because FD is parallel to EG, one of the sides of the triangle AEG ED : DA : : GF : FA : But it has been proved that CE : ED : : BG : GF; therefore, the given straight line AB is divided similarly to AC. *Which was to be done.*

ণানুযায়ি অংশ হইবে সুতরাং কখ রেখার অভীষ্ট অংশ ছিন্ন হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

১০ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে নির্দ্দিষ্ট রূপে বিভক্ত এক সরল রেখার সদৃশ বিভক্ত করিতে হইবে অর্থাৎ তাহা এমত২ অংশে বিভাগ করিতে হইবে যে সে সকল অংশ বিভক্ত রেখার অংশের ন্যায় পরস্পরের সম্বন্ধে নিষ্পত্তি যুক্ত হয়।

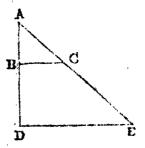
কখ নির্দ্দিষ্ট ভাজ্য সরল রেখা, কগ নির্দ্দিষ্ট বিভক্ত সরল রেখা, কখ রেখাকে কগ রেখার ন্যায় বিভক্ত করিতে হইবেক।

কগ সরল রেখাকে ঘ এবং ঙ বিন্দুতে বিভক্ত কল্পনা কর এবং কখ কগ রেখাকে এমত করিয়া স্থাপন কর যেন তাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি হয় পরে খগ সংযুক্ত করিয়া ঘ এবং ঙ বিন্দু দিয়া খগ রেখার সমানান্তরাল রূপে ঘচ ঙছ নিষ্কাসন কর (১।৩১) এবং ঘ বিন্দু দিয়া ঘজট রেখা কখ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান তাহাতে চজ জখ প্রত্যেকে সমানান্তরাল ক্ষেত্র হইবে এবং তন্নিমিত্ত ঘজ চছ সমান এবং জট ছখ সমান হইবে (১।৩৪) অপর ঘটগ ত্রিভুজের টগ বাহুর সমানান্তরাল জঙ একারণ গঙ : ঙঘ :: টজ : জঘ (৬।২) কিন্তু টজ = খছ এবং জঘ = ছচ অতএব গঙ : ঙঘ :: খছ : ছচ। অপর কছঙ ত্রিভুজের ছঙ বাহুর সমানান্তরাল চঘ একারণ ঙঘ : ঘক :: ছচ : চক। অধিকন্তু ইহাও উপপন্ন হইয়াছে যে গঙ : ঙঘ :: খছ : ছচ অতএব কখ নির্দ্দিষ্ট রেখা কগ রেখার ন্যায় বিভক্ত হইল ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

PROP. XI. PROB.

To find a third proportional to two given straight lines.

Let AB, AC be the two given straight lines, and let them be placed so as to contain any angle; it is required to find a third proportional to AB, AC.

Produce AB, AC to the points D, E; and make BD equal to AC: and having joined BC, through D draw DE, parallel to it (31. 1.).

Because BC is parallel to DE, a side of the triangle ADE, AB : BD : : AC : CE (2. 6.): but BD = AC; therefore AB : AC : : AC : CE. Wherefore, to the two given straight lines AB, AC, a third proportional, CE, is found. *Which was to be done.*

PROP. XII. PROB.

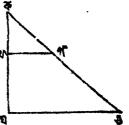
To find a fourth proportional to three given straight lines.

Let A, B, C be the three given straight lines; it is required to find a fourth proportional to A, B, C.

Take two straight lines DE, DF, containing any angle EDF: and upon these make DG equal to A, GE equal to B, and DH equal to C; and having joined GH draw EF parallel (31. 1.) to it through the point

১১ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার তৃতীয় অনুপাতীয় নির্দ্দেশ করিতে হইবে।

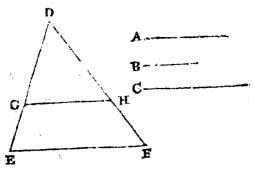
কখ কগ দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত করিয়া স্থাপন কর যেন তাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি হয়। অপর তাহারদের তৃতীয় অনুপাতীয় নির্দ্দেশ করিতে হইবে।

কখ কগ সরল রেখাকে ঘ এবং ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া খঘ সরল রেখাকে কগ সমান কর এবং খগ সংযুক্ত করিয়া ঘ বিন্দু দিয়া ঘঙ তাহার সমানান্তরাল ভাবে নিষ্কাসন কর (১।৩১) কঘঙ ত্রিভুজের ঘঙ বাহুর সমানান্তরাল খগ, একারণ কখ : খঘ :: কগ : গঙ (৬।২) পরন্তু খঘ = কগ অতএব কখ : কগ :: কগ : গঙ সুতরাং কখ কগ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার গঙ তৃতীয় অনুপাতীয় নির্দ্দিষ্ট হইল ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

১২ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

তিন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ অনুপাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে।

ক, খ, গ, তিন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। তাহারদের চতুর্থ অনুপাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে।

ঘঙ ঘচ দুই সরল রেখা কল্পনা কর যাহারদের সম্পাতে কোণোৎপত্তি হইতে পারে যথা ঙঘচ। অপর ঐ২ সরল রেখোপরি ঘছ ক সমান ছঙ খ সমান এবং ঘজ গ সমান করিয়া নিষ্কাসন কর এবং ছজ সংযুক্ত করিয়া ঙ বিন্দু

E. And because GH is parallel to EF, one of the sides of the triangle DEF, DG : GE : : DH : HF (2. 6.): but

DG = A, GE = B, and DH = C; and therefore A : B : : C : HF. Wherefore, to the three given straight lines, A, B, C, a fourth proportional HF is found. *Which was to be done.*

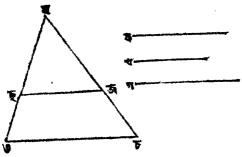
PROP. XIII. PROB.

To find a mean proportional between two given straight lines.

Let AB, BC be the two given straight lines: it is required to find a mean proportional between them.

Place AB, BC in a straight line, and upon AC describe the semicircle ADC, and from the point B (11. 1.) draw BD at right angles to AC, and join AD, DC.

Because the angle ADC in a semicircle is a right angle (31. 3.), and because in the right angled triangle ADC, DB is

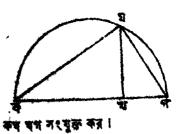
দিয়া ঙচ তাহার সমানান্তরাল রূপে নিষ্কাসন কর (১।৩১) অপর ঘঙচ ত্রিভুজের ঙচ বাহুর সমানান্তরাল ছজ একারণ

ঘছ : ছঙ :: ঘজ : জচ (৬।২) পরন্তু ঘছ = ক, ছঙ = খ এবং ঘজ = গ একারণ ক : খ :: গ : জচ অতএব ক খ গ তিন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার জচ চতুর্থ অনুপাতীয় নির্ণীত হইল। ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

১৩ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার মধ্য অনুপাতীয় নির্দ্দেশ করিতে হইবে।

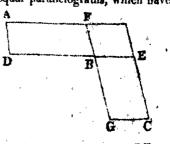
কখ খগ দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, তাহারদের মধ্য অনুপাতীয় নির্ণয় করিতে হইবে।

কখ খগ এক সরল রেখাস্থ করিয়া কগ সরল রেখার উপর কঘগ অর্দ্ধ বৃত্ত নিষ্কাসন কর এবং খ বিন্দু হইতে খঘ রেখা কগ রেখার লম্ব

ভাবে টান (১।১১) এবং কঘ ঘগ সংযুক্ত কর।

drawn from the right angle, perpendicular to the base, DB is a mean proportional between AB, BC, the segments of the base (Cor. 8. 6.); therefore, between the two given straight lines, AB, BC, a mean proportional DB is found. *Which was to be done.*

PROP. XIV. THEOR.

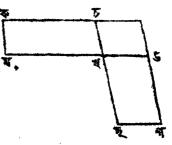
Equal parallelograms which have one angle of the one equal to one angle of the other, have their sides about the equal angles reciprocally proportional: And parallelograms which have one angle of the one equal to one angle of the other, and their sides about the equal angles reciprocally proportional, are equal to one another.

Let AB, BC be equal parallelograms, which have the angles at B equal, and let the sides DB, BE be placed in the same straight line; wherefore also FB, BG are in one straight line (14. 1.): the sides of the parallelograms AB, BC, about the equal angles are, reciprocally proportional: that is, DB is to BE as GB to BF.

Complete the parallelogram FE; and because the parallelograms AB, BC are equal, and FE is another parallelogram, AB : FE : : BC . FE (7. 5.); but because the parallelograms AB, FE have the same altitude,

কখগ কোণ অর্দ্ধ বৃত্তস্থ প্রযুক্ত সম কোণ উপপন্ন হইতেছে (৩।৩১) এবং কখগ সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত লম্বপাত হওয়াতে (৬।৮ অনুমান) খঘ সরল রেখা কখ খগ দুই ভূমি খণ্ডের মধ্য অনুপাতীয় সপ্রমাণ হইল অতএব কখ খগ দুই সরল রেখার মধ্য অনুপাতীয় খঘ নির্ণীত হইল। ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

১৪ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান২ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের একং কোণ সমান হইলে তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয়। তথা যে২ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের একং কোণ সমান এবং সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় তাহারা পরস্পর সমান।

কখ খগ দুই সমান২ সমানান্তরাল ক্ষেত্র তাহারদের খ বিন্দুস্থ কোণ পরস্পর সমান। ঘখ খঙ দুই বাহুকে এক সরল রেখাস্থ করিয়া রাখ সুতরাং চখ খছ দুই বাহুও এক সরল রেখাস্থ হইবে (১।১৪) তাহাতে কখ খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় অর্থাৎ ঘখ যথা খঙ সম্বন্ধে ছখ তথা খচ সম্বন্ধে হইবে।

চঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর। কখ এবং খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্র পরস্পর সমান এবং চঙ অন্য এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র একারণ

AB : FE : : DB : BE (1. 6.), also
BC : FE : : GB : BF (1. 6.); therefore
DB : BE : : GB : BF (11. 5.). Wherefore, the sides of the parallelograms AB, BC about their equal angles are reciprocally proportional.

But, let the sides about the equal angles be reciprocally proportional, viz. as DB to BE, so is GB to BF; the parallelogram AB is equal to the parallelogram BC.

Because, DB : BE : : GB : BF, and DB : BE : : AB : FE, and GB : BF : : BC : EF, therefore, AB : FE : : BC : FE (11. 5): Wherefore, the parallelogram AB is equal (9. 5.) to the parallelogram BC. Therefore, equal parallelograms, &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

Equal triangles which have one angle of the one equal to one angle of the other, have their sides about the equal angles reciprocally proportional: And triangles which have one angle in the one equal to one angle in the other, and their sides about the equal angles reciprocally proportional, are equal to one another.

Let ABC, ADE be equal triangles, which have the angle BAC equal to the angle DAE; the sides about the equal angles of these triangles are reciprocally proportional; that is, CA is to AD, as EA to AB.

কথ : চঙ :: খগ : চঙ (৫।৭।)

অধিকন্তু কথ চঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের উন্নতি এক হওয়াতে (৬।১)

কথ : চঙ :: ঘথ : থঙ এবং

খগ : চঙ :: ছথ : থচ এ কারণ

ঘথ : থঙ :: ছথ : থচ (৫।১১) অতএব কথ খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় উপপন্ন হইল।

কল্পিত সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় কল্পনা কর অর্থাৎ ঘথ : থঙ :: ছথ : থচ তাহাতে কথ সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান উপপন্ন হইবে।

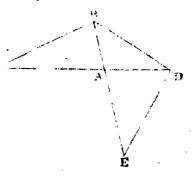
যথা থঙ :: ছথ : থচ এবং ঘথ : থঙ :: কথ : চঙ এবং ছথ : থচ :: খগ : চঙ একারণ কথ : চঙ :: খগ : চঙ (৫।১১) অতএব কথ সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান (৫।৯) সুতরাং সমান২ সমানান্তরাল ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

১৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমান২ ত্রিভুজের এক২ কোণ সমান হইলে তাহাদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয়। তথা যে২ ত্রিভুজের এক২ কোণ সমান এবং সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় তাহারা পরস্পর সমান।

কখগ কঘঙ দুই সমান২ ত্রিভুজ, তন্মধ্যে খকগ কোণ ঘকঙ কোণের সমান। এই দুই ত্রিভুজের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হইবে অর্থাৎ গক যথা কঘ সম্বন্ধে ঙক তথা কখ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

Let the triangles be placed so that their sides CA, AD be in one straight line; wherefore also EA and AB are in one straight line (14. 1.); join BD. Because the triangle ABC is equal to the triangle ADE, and ABD is another triangle;

therefore, triangle CAB : triangle BAD :: triangle EAD : triangle BAD; but CAB : BAD :: CA : AD, and EAD : BAD :: EA : AB; therefore CA : AD :: EA : AB (11. 5.), wherefore the sides of the triangles ABC, ADE about the equal angles are reciprocally proportional.

But, let the sides of the triangles ABC, ADE, about the equal angles be reciprocally proportional, viz. CA to AD as EA to AB; the triangle ABC is equal to the triangle ADE.

Having joined BD as before; because CA : AD :: EA : AB; and since CA : AD :: triangle ABC : triangle BAD (1. 6.); and also EA : AB :: triangle EAD : triangle BAD (11.5.); therefore triangle ABC : triangle BAD :: triangle EAD : triangle BAD; that is, the triangles ABC, EAD have the same ratio to the triangle BAD, wherefore, the triangle ABC is equal (9. 5) to the triangle EAD Therefore, "*equal triangles*," &c. Q E D.

PROP XVI. THEOR.

If four straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to the rectangle

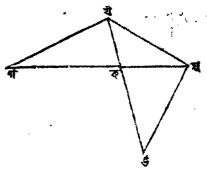
ঐ দুই ত্রিভুজ এমত করিয়া স্থাপন কর যেন গক এবং কঘ দুই বাহু এক সরল রেখাস্থ হয় তাহাতে ঙক এবং কখও এক সরল রেখাস্থ হইবে (১।১৪) খঘ সংযুক্ত কর। কখগ ত্রিভুজ কঘঙ সমান এবং খকঘ অন্য এক ত্রিভুজ একারণ কখগ ত্রিভুজ :

খকঘ :: কঘঙ ত্রিভুজ : খকঘ। পরন্তু কখগ : খকঘ :: গক : কঘ এবং কঘঙ : খকঘ :: ঙক : কখ সুতরাং গক : কঘ :: ঙক : কখ (৫।১১) অতএব কখগ কঘঙ ত্রিভুজের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় সপ্রমাণ হইল।

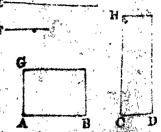
অধিকন্তু কখগ কঘঙ ত্রিভুজের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় অর্থাৎ গক যথা কঘ সম্বন্ধে ঙক তথা কখ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কখগ কঘঙ ত্রিভুজ পরস্পর সমান উপপন্ন হইবে।

পূর্ব্ববৎ খঘ সংযুক্ত কর। গক : কঘ :: ঙক : কখ এবং গক : কঘ :: ত্রিভুজ কখগ : ত্রিভুজ খকঘ (৬।১) এবং ঙক : কখ :: কঘঙ ত্রিভুজ : খকঘ একারণ ত্রিভুজ কখগ : ত্রিভুজ খকঘ :: ত্রিভুজ কঘঙ : ত্রিভুজ খকঘ (৫।১১) অর্থাৎ খকঘ ত্রিভুজ সম্বন্ধে কখগ কঘঙ দুই ত্রিভুজের সমান নিষ্পত্তি পরিমাণ অতএব কখগ ত্রিভুজ কঘঙ ত্রিভুজের সমান সপ্রমাণ হইল (৫।৯) একারণ সমান২ ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এ স্থলে উপপাদ্য।

১৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে দুই প্রান্ত রেখার

contained by the means: And if the rectangle contained by the extremes be equal to the rectangle contained by the means, the four straight lines are proportionals.

Let the four straight lines, AB, CD, E, F be proportionals, viz. as AB to CD, so is E to F; the rectangle contained by AB and F is equal to the rectangle contained by CD and E.

From the points A, C draw (11. 1.) AG, CH at right angles to AB, CD; and make AG equal to F, and CH equal to E, and complete the parallelograms BG, DH. Because AB : CD : : E : F; and since E= CH, and F = AG, AB : CD : : CH : AG; (7. 5.) therefore the sides of the parallelograms BG, DH about the equal angles are reciprocally proportional; but parallelograms which have their sides about equal angles reciprocally proportional, are equal to one another (14. 6.); therefore the parallelogram BG is equal to the parallelogram DH; and the parallelogram BG is contained by the straight lines AB and F; because AG is equal to F; and the parallelogram DH is contained by CD and E, because CH is equal to E; therefore the rectangle contained by the straight lines AB and F is equal to that which is contained by CD and E.

আয়ত দুই মধ্য রেখার আয়ত তুল্য হইবে। তথা দুই প্রান্ত রেখার আয়ত দুই মধ্য রেখার আয়তের সমান হইলে ঐ চারি সরল রেখা অনুপাতীয় হইবে।

কখ গঘ ঙ এবং চ এই চারি সরল রেখা অনুপাতীয় অর্থাৎ কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙ তথা চ সম্বন্ধে কল্পনা কর তাহাতে কখ এবং চ সরল রেখার আয়ত গঘ এবং ঙ রেখার আয়ত তুল্য হইবে।

ক এবং গ বিন্দুতে কখ এবং গঘ সরল রেখার লম্বভাবে কছ এবং গজ নিষ্কাসন কর (১।১১) এবং কছ সরল রেখাকে চ সমান আর গজ সরল রেখাকে ঙ সমান করিয়া খছ ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর। কখ : গঘ :: ঙ : চ এবং ঙ = গজ ও চ = কছ একারণ কখ : গঘ :: গজ : কছ (৫।৭) সুতরাং খছ ঘজ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় নিশ্চিত হইল পরন্তু যেং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় তাহারা পরস্পর সমান হয় (৬।১৪) অতএব খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান উপপন্ন হইল। আর কছ চ সমান প্রযুক্ত খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখ এবং চ সরল রেখার আয়ত এবং গজ ঙ সমান প্রযুক্ত ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গঘ এবং ঙ সরল রেখার আয়ত অতএব কখ এবং চ সরল রেখার আয়ত গঘ এবং ঙ সরল রেখার আয়ত তুল্য সপ্রমাণ হইল।

"And, if the rectangle contained by the straight lines AB, F, be equal to that which is contained by CD, E; these four lines are proportionals, viz. AB is to CD, as E to F.

The same construction being made, because the rectangle contained by the straight lines AB, F is equal to that which is contained by CD, E, and the rectangle BG is contained by AB, F, because AG is equal to F and the rectangle DH by CD, E, because CH is equal to E; therefore the parallelogram BG is equal to the parallelogram DH; and they are equiangular: but the sides about the equal angles of equal parallelograms are reciprocally proportional (14. 6.): wherefore AB : CD : : CH : AG; but CH=E, and AG=F, therefore A : B CD : : E : F. "Wherefore, *if four*," &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

If three straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to the square of the mean: And if the rectangle contained by the extremes be equal to the square of the mean, the three straight lines are proportionals

Let the three straight lines A, B, C be proportionals, viz. as A to B, so is B to C; the rectangle contained by A, C is equal to the square of B.

Take D equal to B: and because as A to B so is B to C, and B is equal to D; A is (7. 5.) to B, as D to C: but, if four straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to that which is contained by the means (16. 6.): therefore the rectangle A. C= the rectangle B.D; but the rectangle BD is equal to the square of B, because

A
B
D
C

অপিচ কখ এবং ঙচ এই দুই সরল রেখার আয়ত গঘ এবং ঙ এই দুই রেখার আয়ত তুল্য কল্পনা করিলে ঐ চারি সরল রেখা অনুপাতীয় অর্থাৎ কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙ তথা চ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইবে।

পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত কর। কখ এবং চ রেখার আয়ত গঘ এবং ঙ রেখার আয়ত তুল্য এবং কছ চ সমান প্রযুক্ত খছ ক্ষেত্র কখ এবং চ রেখার আয়ত সপ্রমাণ হইতেছে তথা গজ ঙ সমান প্রযুক্ত ঘজ ক্ষেত্র গঘ এবং ঙ রেখার আয়ত নির্ণীত হইল অতএব খছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঘজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান আর তাহারা সমান কোণিও বটে অধিকন্তু সমান২ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয় (৬।১৪) অতএব কখ : গঘ :: গজ : কছ পরন্তু গজ = ঙ এবং কছ = চ একারণ কখ : গঘ :: ঙ : চ। অতএব চারি সরল রেখা ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে দুই প্রান্ত রেখার আয়ত মধ্য রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হয়। তথা দুই প্রান্তস্থ সরল রেখার আয়ত মধ্য রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হইলে ঐ তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হয়।

ক খ গ এই তিন সরল রেখা অনুপাতীয় অর্থাৎ ক যথা খ সম্বন্ধে খ তথা গ সম্বন্ধে কল্পনা কর। ক এবং গ সরল রেখার আয়ত খ রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

খ সমান ঘ অন্য এক রেখা কল্পনা কর। ক যথা খ সম্বন্ধে খ তথা গ সম্বন্ধে এবং খ ঘ পরস্পর সমান অতএব ক যথা খ সম্বন্ধে ঘ তথা গ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইল (৫।৭) অধিকন্তু চারি সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে দুই প্রান্তস্থ রেখার

ক
খ
ঘ
গ

B=D; therefore the rectangle A.C is equal to the square of B.

And, if the rectangle contained by A, C be equal to the square of B; A : B : : B : C.

The same construction being made, because the rectangle contained by A.C is equal to the square of B, and the square of B is equal to the rectangle contained by B.D, because B is equal to D; therefore the rectangle contained by A.C is equal to that contained by B.D; but if the rectangle contained by the extremes be equal to that contained by the means, the four straight lines are proportionals (16. 6.): therefore, A : B : : D : C, but B=D; wherefore A : B : : B : C. Therefore, "*if three straight lines,*" &c. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB

Upon a given straight line to describe a rectilineal figure similar, and similarly situated, to a given rectilineal figure.

Let AB be the given straight line, and CDEF the given rectilineal figure of four sides; it is required, upon the given straight line AB, to describe a rectilineal figure similar, and similarly situated to CDEF.

Join DF, and at the points A, B in the straight line AB, make (23. 1.) the angle BAG equal to the angle at C, and the angle ABG equal to the angle CDF; therefore the remaining angle CFD is equal to the remaining angle AGB (32. 1.): wherefore the triangle FCD is equiangular to the triangle GAB: Again, at the points G, B in the straight line GB, make (23. 1.) the angle BGH equal to the angle DFE, and the angle GBH

আয়ত দুই মধ্যস্থ রেখার আয়ত তুল্য হয় (৬।১৬) অতএব ক.গ আয়ত = খ.ঘ কিন্তু খ=ঘ একারণ খ.ঘ আয়ত খ সমচতুর্ভুজ তুল্য অতএব ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজের সমান।

অপিচ যদি ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজের সমান কল্পনা কর তবে ক : খ :: খ : গ উপপন্ন হইবে।

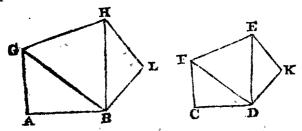
পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত কর। ক.গ আয়ত খ সমচতুর্ভুজ তুল্য এবং খ ঘ পরস্পর সমান হওয়াতে খ সমচতুর্ভুজ খ.ঘ আয়ত তুল্য অতএব ক.গ আয়ত খ.ঘ আয়তের সমান অধিকন্তু প্রান্তস্থ দুই সরল রেখার আয়ত মধ্যস্থ দুই রেখার আয়ত তুল্য হইলে চারি রেখা অনুপাতীয় হয় (৬।১৬) অতএব ক : খ :: ঘ : গ পরন্তু খ = ঘ একারণ ক : খ :: খ : গ অতএব তিন সরল রেখা ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত অন্য এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র নির্দ্দিষ্ট সরল রেখোপরি নিষ্কাসন করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং গঘঙচ নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজ সরল রৈখিক ক্ষেত্র, কখ সরল রেখার উপর গঘঙচ সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসন করিতে হইবে।

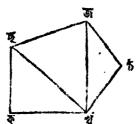
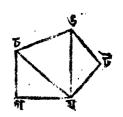
ঘচ সংযুক্ত কর এবং কখ সরল রেখার ক বিন্দুতে খকছ কোণ গ কোণ সমান এবং খ বিন্দুতে কখছ কোণ গঘচ সমান

equal to FDE ; therefore the remaining angle FED is

equal to the remaining angle GHB, and the triangle FDE equiangular to the triangle GBH : then, because the angle AGB is equal to the angle CFD, and BGH to DFE, the whole angle AGH is equal to the whole CFE : for the same reason, the angle ABH is equal to the angle CDE ; also, the angle at A is equal to to the angle at C, and the angle GHB to FED : Therefore the rectilineal figure ABHG is equiangular to CDEF : But likewise these figures have their sides about the equal angles proportionals : for the triangles GAB, FCD being equiangular,

BA : AG : : DC : CF (4. 6.); for the same reason, AG : GB : : CF : FD; and because of the equiangular triangles, BGH, DFE, GB : GH : : FD : FE ; therefore *ex æquali* (22. 5.), AG : GH : : CF : FE. In the same manner, it may be proved, that

AB : BH : : CD : DE. Also (4. 6.),

GH : HB : : FE : ED. Wherefore, because the rectilineal figures ABHG, CDEF are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals, they are similar to one another (Def. 1. 6.)

করিয়া নিষ্কাসন কর (১।২৩) তাহাতে অবশিষ্ট গচঘ কোণ কছখ সমান হইবে

(১।৩২) অতএব চগঘ ত্রিভুজ ছকখ ত্রিভুজের সমান কোণি। পুনশ্চ খছ রেখাস্থ ছ বিন্দুতে খছজ কোণ ঘচঙ কোণ সমান এবং খ বিন্দুতে ছখজ কোণ চঘঙ সমান করিয়া নিষ্কাসন কর (১।২৩) তাহাতে অবশিষ্ট ছজখ কোণ চঙঘ কোণের সমান হইবে অতএব ছখজ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কোণি। অপর কছখ কোণ গচঘ সমান এবং খছজ কোণ ঘচঙ সমান তন্নিমিত্ত সমুদয় কছজ সমুদয় গচঙ কোণ তুল্য। তদ্রূপ সমুদয় কখজ কোণও গঘঙ সমান উপপন্ন হইবে। অপর ক কোণ গ সমান ও ছজখ কোণ ঘঙচ সমান পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে অতএব কখজছ সরল রৈখিক ক্ষেত্র গঘঙচ ক্ষেত্রের সমান কোণি সপ্রমাণ হইল। ঐ ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অনুপাতীয় সপ্রমাণ হইবে কেননা কখছ গঘচ এই দুই ত্রিভুজ সমানকোণি হওয়াতে

খক : কছ :: ঘগ : গচ (৬।৪) ঐ কারণ

কছ : ছখ :: গচ : চঘ। এবং খছজ ঘঙচ

সমান কোণি ত্রিভুজ হওয়াতে ছখ : ছজ :: চঘ : চঙ অতএব (৫।২২) সামান্যতঃ কছ : ছজ :: গচ : চঙ। তদ্রূপ কখ : খজ :: গঘ : ঘঙ এবং ছজ : জখ :: চঙ : ঙঘ উপপন্ন হইবে। অতএব কখজছ এবং গঘঙচ সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমান কোণি এবং তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে তাহারা সদৃশ শব্দবাচ্য হইল (৬,১)।

Next, Let it be required to describe upon a given straight line AB, a rectilineal figure, similar and similarly situated to the five-sided rectilineal figure CDKEF. Join DE, and upon the given straight line AB describe the rectilineal figure ABHG similar, and similarly situated to the quadrilateral figure CDEF, by the former case; and at the points B, H in the straight line BH, make the angle HBL equal to the angle EDK, and the angle BHL equal to the angle DEK; therefore the remaining angle at K is equal to the remaining angle at L; and because the figures ABHG, CDEF are similar, the angle GHB is equal to the angle FED, and BHL is equal to DEK; wherefore the whole angle GHL is equal to the whole angle FEK; for the same reason, the angle ABL is equal to the angle CDK: therefore the five-sided figures AGHLB, CFEKD are equiangular; and because the figures AGHB, CFED are similar, GH is to HB as FE to ED; and as HB to HL, so is ED to EK (4. 6.); therefore *ex æquali* (22. 5.), GH is to HL as FE to EK: for the same reason, AB is to BL, as CD to DK: and BL is to LH, as (4. 6.) DK, KE, because the triangles BLH, DKE are equiangular, therefore, because the five-sided figures AGHLB, CFEKD, are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals, they are similar to one another: and in the same manner, a rectilineal figure of six, or more, sides may be described upon a given straight line similar to one given, and so on. *Which was to be done.*

PROP. XIX. THEOR.

Similar triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologous sides.

অনন্তর কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর গঘটঙচ পঞ্চভুজের সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসন করিতে আকাঙ্ক্ষা হউক।

ঘঙ সংযুক্ত কর এবং পূর্ব্বোক্ত ধারায় কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর গঘঙচ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং তদ্রূপে স্থাপিত কখজছ ক্ষেত্র নিষ্কাসন কর, এবং জখ রেখাস্থ জ বিন্দুতে খজঠ কোণ ঘঙট সমান এবং খ বিন্দুতে জখঠ কোণ ঙঘট সমান করিয়া নিষ্কাসন কর তাহাতে অবশিষ্ট ঠ কোণ ট সমান হইবে। অপর কখজছ এবং গঘঙচ দুই ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে ছজখ কোণ চঙঘ কোণের সমান হইবে অতএব সমুদয় ছজঠ কোণ সমুদয় চঙট কোণের সমান উপপন্ন হইল। তদ্রূপ কখঠ কোণ গঘট সমান সপ্রমাণ হইবে অতএব কখঠজছ পঞ্চভুজ গঘটঙচ পঞ্চভুজের সমান কোণি নিশ্চিত হইল। অপর কখজছ ক্ষেত্র গঘঙচ ক্ষেত্রের সদৃশ প্রযুক্ত ছজ যথা জখ সম্বন্ধে চঙ তথা ঙঘ সম্বন্ধে হইবে এবং জখ যথা জঠ সম্বন্ধে ঙঘ তথা ঙট সম্বন্ধে (৬।৫) অতএব (৫।২২) সামানান্তঃ ছজ যথা জঠ সম্বন্ধে চঙ তথা ঙট সম্বন্ধে। তদ্রূপ কখ যথা খঠ সম্বন্ধে গঘ তথা ঘট সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে এবং খঠ যথা ঠজ সম্বন্ধে ঘট তথা টঙ সম্বন্ধে নির্ণীত আছে কেননা খঠজ ত্রিভুজ ঘটঙ ত্রিভুজের সমান কোণি। অতএব কখঠজছ পঞ্চভুজ গঘটঙচ পঞ্চভুজের সমানকোণি এবং তাহাদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে তাহারা সদৃশ শব্দ বাচ্য হইল। তদ্রূপ নির্দ্দিষ্ট ষড়্ভুজ অথবা ততোধিক বাহু বিশিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ক্ষেত্র নির্দ্দিষ্ট রেখার উপর নিষ্কাসিত করা যাইতে পারে। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

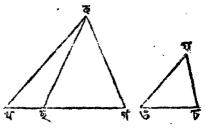
১৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যে২ ত্রিভুজ সদৃশ তাহারা সবর্গীয় বাহুর দ্বিঘাত নিষ্পত্তি পরিমাণে পরস্পর অনুপাতীয়।

Let ABC, DEF be similar triangles, having the angle B equal to the angle E, and let AB be to BC, as DE to EF, so that the side BC is homologous to EF (Def. 13. 5.); the triangle ABC has to the triangle DEF, the duplicate ratio of that which BC has to EE.

Take BG a third proportional to BC and EF (11. 6.) or such that

BC : EF : : EF : BG, and join GA. Then
AB : BC : : DE : EF, alternately (16. 5.),
AB : DE : : BC : EF ; but
BC : EF : : EF : BG ; therefore (11. 5.)
AB : DE : : EF : BG : wherefore the sides of the triangles ABG, DEF, which are about the equal angles, are reciprocally proportional : but triangles which have the sides about two equal angles reciprocally proportional, are equal to one another (15. 6.) : therefore, the triangle ABG is equal to the triangle DEF ; and because that BC is to EF, as EF to BG ; and that if three straight lines be proportionals, the first has to the third the duplicate ratio of that which it has to the second ; BC therefore has to BG the duplicate ratio of that which BC has to EF. But as BC to BG, so is (1. 6.) the triangle ABC to the triangle ABG ; therefore the triangle ABC has to the triangle ABG the duplicate ratio of that which BC has to EF ; and the triangle ABG is equal to the triangle DEF ; where-

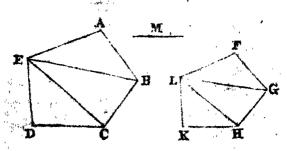
কখগ ঘঙচ দুই সদৃশ ত্রিভুজ, তন্মধ্যে খ কোণ ঙ কোণের সমান এবং কখ যথা খগ সম্বন্ধে ঘঙ তথা ঙচ সম্বন্ধে, সুতরাং খগ বাহু ঙচ বাহুর সবর্ণীয়। (৫।১৩ সংজ্ঞা) খগ ঙচ বাহুর পরস্পর নিষ্পত্তির দ্বিঘাত পরিমাণে কখগ এবং ঘঙচ ত্রিভুজ পরস্পর অনুপাতীয় হইবে।

খগ এবং ঙচ দুই রেখার খছ তৃতীয় অনুপাতীয় কল্পনা কর (৬।১১) অর্থাৎ খগ : ঙচ :: ঙচ : খছ। পরে কছ সংযুক্ত কর অপর কখ : খগ :: ঘঙ : ঙচ তন্নিমিত্ত বিনিময় নিষ্পত্তিতে। (৫।১৬) কখ : ঘঙ :: খগ : ঙচ পরন্তু
খগ : ঙচ :: ঙচ : খছ একারণ (৫।১১)
কখ : ঘঙ :: ঙচ : খছ অতএব কখছ ঘঙচ ত্রিভুজে। সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয়। অধিকন্তু দুই ত্রিভুজের দুই সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হইলে তাহারা সমান হয় (৬।১৫) অতএব কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান। অপর খগ যথা ঙচ সম্বন্ধে ঙচ তথা খছ সম্বন্ধে এবং তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে প্রথমের দ্বিতীয় সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ তৃতীয় সম্বন্ধে তদ্দ্বিঘাত। অতএব খগ রেখার ঙচ সহিত যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খছ সহিত তাহার তদ্দ্বিঘাত। পরন্তু খগ যথা খছ সম্বন্ধে কখগ ত্রিভুজ তথা কখছ ত্রিভুজ সম্বন্ধে (৬।১) অতএব খগ সরল রেখার ঙচ সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ কখগ ত্রিভুজের কখছ সহিত তাহার দ্বিঘাত সম্বন্ধ এবং

fore also the triangle ABC has to the triangle DEF the duplicate ratio of that which BC has to EF. Therefore, similar triangles, &c. Q. E. D.

COR. From this it is manifest, that if three straight lines be proportionals, as the first is to the third, so is any triangle upon the first to a similar, and similarly described triangle upon the second.

PROP. XX. THEOR.

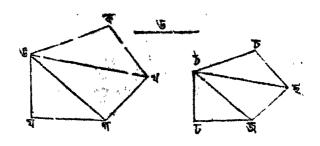
Similar polygons may be divided into the same number of similar triangles, having the same ratio to one another that the polygons have; and the polygons have to one another the duplicate ratio of that which their homologous sides have.

Let ABCDE, FGHKL be similar polygons, and let AB be the homologous side to FG: the polygons ABCDE, FGHKL may be divided into the same number of similar triangles, whereof each has to each the same ratio which the polygons have; and the polygon ABCDE has to the polygon FGHKL a ratio duplicate of that which the side AB has to the side FG.

কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান হওয়াতে খগ রেখার ঙচ সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ কখগ ত্রিভুজের ঘঙচ ত্রিভুজের সহিত তাহার দ্বিঘাত সম্বন্ধ। অতএব যেং ত্রিভুজ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

অনুমান। এস্থলে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে প্রথমের তৃতীয় সহিত যেমত নিষ্পত্তি সম্বন্ধ প্রথমোপরি নিষ্কাসিত ত্রিভুজের দ্বিতীয়োপরি নিষ্কাসিত তৎসদৃশ ত্রিভুজের সহিত তাদৃশ সম্বন্ধ।

২০ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যেং বহুভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ তাহারা সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত হইতে পারে এবং সে সকল ত্রিভুজের বহুভুজ ক্ষেত্রের ন্যায় পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ এবং সবর্গীয় বাহুর পরস্পর যে নিষ্পত্তি ঐ বহুভুজ ক্ষেত্রের পরস্পর সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে নিষ্পত্তি।

কখগঘঙ এবং চছজঝঠ দুই সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র এবং কখ বাহু চছ বাহুর সবর্গীয়। কখগঘঙ চছজঝঠ সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারিবে এবং ত্রিভুজ সকলের পরস্পর ঐ দুই বহুভুজ ক্ষেত্রের তুল্য নিষ্পত্তি সম্বন্ধ আর কখ বাহুর চছ বাহুর সহিত যে নিষ্পত্তি সম্বন্ধ কখগঘঙ বহুভুজের চছজঝঠ বহুভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে নিষ্পত্তি উপপন্ন হইবে।

Join BE, EC, GL, LH : and because the polygon
ABCDE is similar to the polygon FGHKL, the angle
BAE is equal to the angle GFL (Def. 1. 6.). and BA :
AE : : GF : FL (Def. 1. 6.) : wherefore, because the
triangles ABE, FGL, have an angle in one equal to an
angle in the other, and their sides about these equal
angles proportionals, the triangle ABE is equiangular
(6. 6.), and therefore similar to the triangle FGL
(4. 6.); wherefore the angle ABE is equal to the angle
FGL : and, because the polygons are similar, the
whole angle ABC is equal (Def. 1. 6.) to the whole
angle FGH; therefore the remaining angle EBC is
equal to the remaining angle LGH : now, because the
triangles ABE, FGL are similar, EB : BA : : LG :
FG; and also because the polygons are similar,
AB : BC : : FG : GH (Def. 1. 6.); therefore *ex
æquali* (22. 5.); EB : BC : : LG : GH; that is, the sides
about the equal angles EBC, LGH are proportionals;
therefore (6. 6.) the triangle EBC is equiangular to the
triangle LGH, and similar to it (4. 6.). For the same
reason, the triangle ECD is likewise similar to the
triangle LHK; therefore, *the similar polygons* ABCDE,
FGHKL *are divided into the same number of similar
triangles.*

Also, *these triangles have, each to each, the same ratio
which the polygons have to one another*, the antecedents
being ABE, EBC, ECD, and the consequents FGL,
LGH, LHK : and the polygon ABCDE has to the
polygon FGHKL the duplicate ratio of that which the
side AB has to the homologous side FG.

Because the triangle ABE is similar to the triangle
FGL, ABE has to FGL the duplicate ratio (19. 6.) of
that which the side BE has to the side GL : for the

বাহুর ছঠ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খঙগ ত্রিভুজের ছঠক সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত নিষ্পত্তি পরিমাণ অতএব কখঙ ত্রিভুজ যথা চছঠ ত্রিভুজ সম্বন্ধে খঙগ ত্রিভুজ তথা ঠছজ সম্বন্ধে (৫।১১) অপর খঙগ ত্রিভুজ ছঠজ ত্রিভুজের সদৃশ একারণ ঙগ বাহুর ঠজ বাহু সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ খঙগ ত্রিভুজের ছঠজ ত্রিভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি তদ্রূপ ঙগ বাহুর ঠজ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি ঙগঘ ত্রিভুজের ঠজঢ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি উপপন্ন হইবে অতএব খঙগ ত্রিভুজ যথা ছঠজ সম্বন্ধে ঙগঘ তথা ঠজঢ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইল। অধিকন্তু পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে কখঙ ত্রিভুজ যথা চছঠ সম্বন্ধে ঙখগ তথা ঠছজ সম্বন্ধে তন্নিমিত্ত কখঙ যথা চছঠ সম্বন্ধে খঙগ তথা ছঠজ সম্বন্ধে এবং ঙগঘ, ঠজঢ সম্বন্ধে। সুতরাং একং অগ্রবর্ত্তি ত্রিভুজ যথা একং পশ্চাদ্বর্ত্তির সম্বন্ধে সমুদয় অগ্রবর্ত্তি তথা সমুদয় পশ্চাদ্বর্ত্তির সম্বন্ধে উপপন্ন হইল অতএব কখঙ ত্রিভুজ যথা চছঠ সম্বন্ধে কখগঘঙ বহুভুজ তথা চছজঢঠ বহুভুজ সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে পরন্তু কখ বাহুর চছ সবর্গীয় বাহু সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কখঙ ত্রিভুজের চছঠ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি অতএব কখ বাহুর চছ সবর্গীয় বাহু সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কখগঘঙ বহুভুজের চছজঢঠ বহুভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি। অতএব যেং বহুভুজ ক্ষেত্র ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১ অনুমান। তদ্রূপ চারি কিম্বা অন্য কোন সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট ক্ষেত্র সবর্গীয় ভুজের দ্বিঘাত পরিমাণে পরস্পর সম্বন্ধে নিষ্পত্তি বিশিষ্ট উপপন্ন হইবে। ত্রিভুজের বিষয়ে পূর্ব্বে ঐ রূপ সপ্রমাণ হইয়াছে অতএব ব্যাপক ভাবে কহা যাইতে পারে যে সরল রৈখিক ক্ষেত্র মাত্রই সবর্গীয় বাহুর দ্বিঘাত পরিমাণে পরস্পর নিষ্পত্তি বিশিষ্ট হয়।

Cor. 2. And if to AB, FG, two of the homologous sides, a third proportional M be taken, AB has (Def. 11. 5.) to M the duplicate ratio of that which AB has to FG; but the four-sided figure, or polygon, upon AB has to the four-sided figure, or polygon, upon FG, likewise the duplicate ratio of that which AB has to FG: therefore, as AB is to M, so is the figure upon AB to the figure upon FG, which was also proved in triangles (Cor. 19. 6.) Therefore, universally, it is manifest, that if three straight lines be proportionals, as the first is to the third, so is any rectilineal figure upon the first, to a similar and similarly described rectilineal figure upon the second.

Cor. 3. Because all squares are similar figures, the ratio of any two squares to one another is the same with the duplicate ratio of their sides; and hence, also any two similar rectilineal figures are to one another as the squares of their homologous sides.

PROP. XXI. THEOR.

Rectilineal figures which are similar to the same rectilineal fiȷure, are also similar to one another.

Let each of the rectilineal figures A, B be similar to the rectilineal figure C: The figure A is similar to the figure B.

Because A is similar to C, they are equiangular, and also have their sides about the equal angles proportion-

খঙ গঙ ছঠ জঠ সংযুক্ত কর। অপর কখগঘঙ বহুভুজ চছ-জটঠ বহুভুজের সদৃশ একারণ খকঙ কোণ ছচঠ কোণের সমান (৬।১সং) এবং খক : কঙ :: ছচ : চঠ (৬।১সং)। অতএব কখঙ ছচঠ ত্রিভুজের একং কোণ সমান এবং সমানং কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে কখঙ ত্রিভুজ ছচঠ ত্রিভুজের সমান কোণি (৬।৬) সুতরাং সদৃশ (৬।৪) অতএব কখঙ কোণ চছঠ কোণের সমান। অধিকন্তু ঐ দুই বহুভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ হওয়াতে সমুদয় কখগ কোণ সমুদয় চছজ সমান সুতরাং অবশিষ্ট ঙখগ কোণ ঠছজ সমান। অপর কখঙ চছঠ ত্রিভুজ সদৃশ প্রযুক্ত ঙখ : খক :: ঠছ : ছচ এবং বহুভুজ ক্ষেত্রের সাদৃশ্য হেতুক কখ : খগ :: চছ : ছজ সুতরাং সামা-নান্তঃ (৫।২২) ঙখ : খগ :: ঠছ : ছজ অর্থাৎ ঙখগ এবং ঠছজ সমানং কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় একা-রণ (৬।৬) ঙখগ ত্রিভুজ ঠছজ ত্রিভুজের সমান কোণি এবং সদৃশ (৬।৪) তদ্রূপ ঙগঘ ত্রিভুজ ঠজট ত্রিভুজের সদৃশ উপ-পন্ন হইবে অতএব কখগঘঙ এবং চছজটঠ এই উভয় সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হই-য়াছে।

অপিচ ইহাও উপপন্ন হইবে যে ঐ দুই বহুভুজের পর-স্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ উক্ত তিন ত্রিভুজেরও পরস্পর সম্বন্ধে ক্রমশঃ সেই নিষ্পত্তি পরিমাণ, তাহার মধ্যে কখঙ ঙখগ ঙগঘ অগ্রবর্ত্তি এবং চছঠ ঠছজ ঠজট পশ্চা-দ্বর্ত্তি, এবং কখ বাহুর সবর্গীয় চছ বাহু সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কখগঘঙ বহুভুজের চছজটঠ বহুভুজ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি।

কখঙ ত্রিভুজ চছঠ ত্রিভুজের সদৃশ হওয়াতে খঙ বাহুর ছঠ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ কখঙ ত্রিভুজের চছঠ সম্বন্ধে তাহার দ্বিঘাত পরিমাণ নিষ্পত্তি (৬।১৯) ঐ কারণ খঙ

same reason, the triangle BEC has to GLH the duplicate ratio of that which BE has to GL; therefore, as the triangle ABE to the triangle FGL, so (11. 5.) is the triangle BEC to the triangle GLH. Again, because the triangle EBC is similar to the triangle LGH, EBC has to LGH the duplicate ratio of that which the side EC has to the side LH: for the same reason, the triangle ECD has to the triangle LHK, the duplicate ratio of that which EC has to LH: therefore, as the triangle EBC to the triangle LGH, so is (11. 5.) the triangle ECD to the triangle LHK: but it has been proved, that the triangle EBC is likewise to the triangle LGH, as the triangle ABE to the triangle FGL. Therefore, as the triangle ABE is to the triangle FGL, so is the triangle EBC to the triangle LGH, and the triangle ECD to the triangle LHK: and therefore, as one of the antecedents to one of the consequents, so are all the antecedents to all the consequents (12. 5.) Wherefore as the triangle ABE to the triangle FGL, so is the polygon ABCDE to the polygon FGHKL: but the triangle ABE has to the triangle FGL, the duplicate ratio of that which the side AB has to the homologous side FG. Therefore also the polygon ABCDE has to the polygon FGHKL the duplicate ratio of that which AB has to the homologous side FG. Wherefore, similar polygons &c. Q. E. D.

Cor. 1. In like manner, it may be proved, that similar figures of four sides, or of any number of sides, are one to another in the duplicate ratio of their homologous sides: and the same has already been proved of triangles; therefore, universally, similar rectilineal figures are to one another in the duplicate ratio of their homologous sides.

২ অনুমান। কখ চছ দুই সবর্গীয় বাহুর যদি তৃতীয় অনুপাতীয় ভ কল্পনা করা যায় তবে (৫।১১ সংজ্ঞা) কখ যথা চছ সম্বন্ধে কখ তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে ভ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইবে পরন্তু কখ যথা চছ সম্বন্ধে কখ উপরিস্থ চতুর্ভুজ অথবা বহুভুজ ক্ষেত্র তাহার দ্বিঘাত পরিমাণে চছ উপরিস্থ চতুর্ভুজ অথবা বহুভুজ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে সুতরাং ত্রিভুজের বিষয়ে যদ্রূপ সপ্রমাণ হইয়াছে (৬।১৯ অনু) তদ্রূপ কখ যথা ভ সম্বন্ধে কখ উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা চছ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে। অতএব ব্যাপক ভাবে কহা যাইতে পারে যে তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে প্রথম যথা তৃতীয়ের সম্বন্ধে প্রথমোপরি নিষ্কাসিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র তথা দ্বিতীয়োপরি তাদৃশ রূপে নিষ্কাসিত সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সম্বন্ধে অনুমেয় হইবেক।

৩ অনুমান। সমচতুর্ভুজ মাত্রই সদৃশ ক্ষেত্র একারণ দুই সমচতুর্ভুজের পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ আপনং বাহুর সম্বন্ধে দ্বিঘাত পরিমাণ এবং দুই সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ তাহারদের সবর্গীয় বাহুর সমচতুর্ভুজের তুল্য।

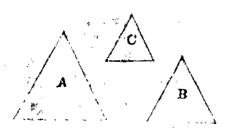
---

২১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

যেং সরল রৈখিক ক্ষেত্র সকল এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ তাহারা পরস্পরও সদৃশ।

ক এবং খ দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্র প্রত্যেকে গ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ কল্পনা কর তাহাতে ক এবং খ ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ হইবে।

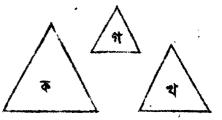
ক এবং গ সদৃশ একারণ তাহারা সমান কোণি এবং তাহারদের সমানং কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয়

als (Def. 1. 6.) Again, because B is similar to C, they are equiangular, and have their sides about the equal angles proportionals (Def. 1. 6.):

therefore the figures A, B are each of them equiangular to C, and have the sides about the equal angles of each of them, and of C, proportionals. Wherefore the rectilineal figures A and B are equiangular (1. Ax. 1.), and have their sides about the equal angles proportionals (11. 5.). Therefore, A is similar (Def. 1. 6.) to B. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

If four straight lines be proportionals, the similar rectilineal figures similarly described upon them shall also be proportionals; and if the similar rectilineal figures similarly described upon four straight lines be proportionals, those straight lines shall be proportionals.

Let the four straight lines AB, CD, EF, GH be proportionals, viz. AB to CD, as EF to GH; and upon AB, CD let the similar rectilineal figures KAB, LCD be similarly described; and upon EF, GH the similar rectilineal figures MF, NH, in like manner; the rectilineal figure KAB is to LCD, as MF to NH.

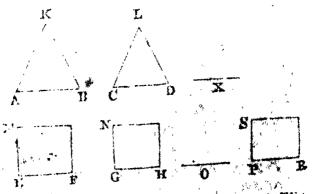
(৬।১ সংজ্ঞা)। তথা খ এবং গ সদৃশ হওয়াতে তাহারাও সমান কোণি এবং তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় অতএব ক এবং খ প্রত্যেকে গ ক্ষেত্রের সমান কোণি এবং তাহারদের ও গ ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় সুতরাং (১।১ স্বং সা) ক এবং খ পরস্পর সমান কোণি এবং তাহারদের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহুও অনুপাতীয় (৫।১১) অতএব ক এবং খ পরস্পর সদৃশ। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

২২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

চারি সরল রেখা অনুপাতীয় হইলে যেং সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র তাহারদের উপর একাকারে নিষ্কাসিত হয় সে সকলও অনুপাতীয় হইবে এবং চারি সরল রেখার উপর পরস্পর সদৃশ ও একাকারে নিষ্কাসিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র অনুপাতীয় হইলে সে সকল রেখাও অনুপাতীয় হইবে।

কখ গঘ ঙচ ছজ চারি সরল রেখা অনুপাতীয় জ্ঞান কর অর্থাৎ কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা ছজ সম্বন্ধে কল্পনা কর এবং কখ গঘ রেখার উপর টকখ ও ঠগঘ দুই সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র একাকারে অঙ্কিত হউক তথা ঙচ ছজ রেখার উপর ডচ ঢজ দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্র তদ্রূপ অঙ্কিত হউক তাহাতে টকখ ক্ষেত্র যথা ঠগঘ সম্বন্ধে ডচ তথা ঢজ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

To AB, CD take a third proportional (11. 6.) X; and to EF, GH a third proportional O: and because
AB : CD : : EF : GH, and
CD : X : : GH : O, (11. 5.) ex æquali (21. 5.),
AB : X : : EF : O. But
AB : X : : KAB : LCD; (2. Cor. 20. 6.) and EF : O : : MF : NH: (2. Cor. 20. 6.) therefore KAB : LCD : : MF : NH. (2. Cor. 20. 6.)

And if the figure KAB be to the figure LCD, as the figure MF to the figure NH, AB is to CD, as EF to GH.

Make (12. 6.) as AB to CD, so EF to PR, and upon PR describe (18. 6.) the rectilineal figure SR similar, and similarly situated to either of the figures

MF, NH: then, because as AB to CD, so is EF to PR, and upon AB, CD are described the similar and similarly situated rectilineals KAB, LCD, and upon EF, PR, in like manner, the similar rectilineals MF, SR; KAB is to LCD, as MF to SR; but by the hypothesis, KAB is to LCD, as MF to NH; and therefore the rectilineal MF having the same ratio to

কখ গঘ সরল রেখার ভ তৃতীয় অনুপাতীয় এবং ঙচ ছজ সরল রেখার ণ তৃতীয় অনুপাতীয় নির্ণয় কর (৬।১১) অপর

কখ : গঘ :: ঙচ : ছজ এবং

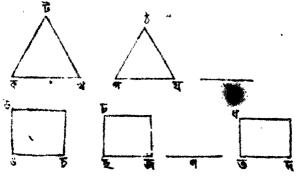
গঘ : ভ :: ছজ : ণ (৫।১১) সুতরাং সামান্যতঃ(৬।১১)

কখ : ভ :: ঙচ : ণ পরন্তু

কখ : ভ :: টকখ : ঠগঘ (৬।২০ দ্বিতীয় অনু) এবং

ঙচ : ণ :: ডচ : ঢজ অতএব

টকখ : ঠগঘ :: ডচ : ঢজ।

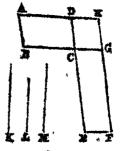
অপিচ যদি টকখ ক্ষেত্র যথা ঠগঘ ক্ষেত্র সম্বন্ধে ডচ ক্ষেত্র তথা ঢজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে কল্পিত হয় তবে কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা ছজ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা তদ সম্বন্ধে কল্পনা কর (৬।১২) এবং তদ রেখার উপর ধদ সরল রৈখিক ক্ষেত্র ডচ অথবা ঢজ ক্ষেত্র সদৃশ এবং একাকারে স্থাপিত করিয়া নিষ্কাসিত কর (৬।১৮) কখ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা তদ সম্বন্ধে এবং কখ ও গঘ রেখার উপর টকখ ও ঠগঘ সদৃশ এবং একাকারে স্থাপিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসিত হইয়াছে ও ঙচ তদ রেখার উপর ডচ ধদ ক্ষেত্র তাদৃশ রূপে অঙ্কিত হইয়াছে একারণ টকখ যথা ঠগঘ সম্বন্ধে ডচ তথা ধদ সম্বন্ধে

each of the two NH, SR, these two are equal (9. 5.) to one another: they are also similar, and similarly situated; therefore GH is equal to PR: and because as AB to CD, so is EF to PR and because PR is equal to GH, AB is to CD, as EF to GH. If, therefore, four straight lines, &c. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Equiangular parallelograms have to one another the ratio which is compounded of the ratios of their sides.

Let AC, CF be equiangular parallelograms, having the angle BCD equal to the angle ECG; the ratio of the parallelogram AC to the parallelogram CF is the same with the ratio which is compounded of the ratios of their sides.

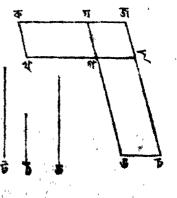
Let BC, CG be placed in a straight line; therefore DC and CE are also in a straight line (14. 1.), complete the parallelogram DG; and taking any straight line K, make (12. 6.) as BC to CG, so K to L; and as DC to CE, so make (12. 6.) L to M: therefore the ratios of K to L, and L to M are the same with the ratio of the sides, or of BC to CG, and of DC to CE. But the ratio of K to M is that which is said to be

সপ্রমাণ হইল পরন্তু টকথ যথা ঠগঘ সম্বন্ধে ডচ তথা চজ সম্বন্ধে কল্পনা করা গিয়াছে একারণ ডচ ক্ষেত্রের চজ এবং খঘ দুই ক্ষেত্র সম্বন্ধে সমান নিষ্পত্তি পরিমাণ হওয়াতে চজ এবং খদ পরস্পর সমান (৫।৯) অধিকন্তু তাহারা সদৃশ এবং সদৃশ রূপে স্থাপিতও বটে তন্নিমিত্ত ছজ এবং তদ পরস্পর সমান। অপর কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা তদ সম্বন্ধে এবং তদ ও ছজ পরস্পর সমান একারণ কথ যথা গঘ সম্বন্ধে ঙচ তথা ছজ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইল। অতএব চারি সরল রেখা ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

২৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমানকোণি কএক সমানান্তরাল ক্ষেত্রের বাহু পরস্পর সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ বিশিষ্ট ক্ষেত্রফলের পরিমাণ তাহার যোগোৎপন্ন পরিমাণ তুল্য হইবে।

কগ গচ সমান কোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র কল্পন, কর তাহার মধ্যে খগঘ কোণ ঙগছ সমান। কগ গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রস্থ বাহুর পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধের যোগ পরিমাণে ঐ দুই ক্ষেত্রের পরস্পর নিষ্পত্তি সম্বন্ধ উপপন্ন হইবে।

খগ গছ এক সরল রেখায় স্থাপন কর সুতরাং ঘগ গঙও এক সরল রেখায় হইবে (১।১৪) অপর ঘছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র পূর্ণ কর এবং ট অন্য সরল রেখা নির্দ্দিষ্ট করিয়া খগ যথা গছ সম্বন্ধে ট তথা ঠ সম্বন্ধে কল্পনা কর (৬।১২) এবং ঘগ যথা

compounded (Def 10. 5.) of the ratios of K to L, and L to M; wherefore also K has to M the ratio compounded of the ratios of the sides of the parallelograms. Now, because as BC to CG, so is the parallelogram AC to the parallelogram CH (1.6.); and as BC to CG, so is K to L, therefore K is (11. 5.) to L, as the parallelogram AC to the parallelogram CH: again, because as DC to CE, so is the parallelogram CH to the parallelogram CF: and as DC to CE, so is L to M; therefore L is (11. 5.) to M, as the parallelogram CH to the parallelogram CF: therefore since it has been proved, that as K to L, so is the parallelogram AC to the parallelogram CH; and as L to M, so the parallelogram CH to the parallelogram CF; ex æquali (22.5.), K is to M, as the parallelogram AC to the parallelogram CF; but K has to M the ratio, which is compounded of the ratios of the sides; therefore also the parallelogram AC has to the parallelogram CF the ratio which is compounded of the ratios of the sides. Wherefore, equiangular parallelograms &c. Q. E. D.

PROP XXIV. THEOR.

The parallelograms about the diameter of any parallelogram, are similar to the whole, and to one another.

Let ABCD be a parallelogram, of which the diameter is AC; and EG, HK the parallelograms about

গঙ সম্বন্ধে ঠ তথা ড সম্বন্ধে কল্পনা কর অতএব ট এবং ঠ মধ্যে যে সম্বন্ধ এবং ঠ ও ড মধ্যে যে সম্বন্ধ তাহা উক্ত দুই ক্ষেত্রের খগ গছ এবং ঘগ গঙ বাহুর মধ্যস্থ সম্বন্ধের সমান হইবে। পরন্তু ট এবং ড মধ্যে যে সম্বন্ধ তাহা ট এবং ঠ ও ঠ এবং ড মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগে উৎপন্ন বলিয়া উক্ত হয় (৫।১০ সংজ্ঞা) সুতরাং ট এবং ড মধ্যস্থ নিষ্পত্তি সম্বন্ধ ঐ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রস্থ বাহুর পরস্পর সম্বন্ধের যোগ পরিমাণানুযায়ি হইবে। অপর খগ যথা গছ সম্বন্ধে কগ সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা গজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্বন্ধে (৬।১) এবং খগ যথা গছ সম্বন্ধে ট তথা ঠ সম্বন্ধে একারণ ট যথা ঠ সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৫।১১) পুনশ্চ ঘগ যথা গঙ সম্বন্ধে গজ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৬।১) এবং ঘগ যথা গঙ সম্বন্ধে ঠ তথা ড সম্বন্ধে সুতরাং ঠ যথা ড সম্বন্ধে গজ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৫।১১) অতএব ইহা সপ্রমাণ হইল যে ট যথা ঠ সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে এবং ঠ যথা ড সম্বন্ধে গজ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে একারণ সামান্যতঃ ট যথা ড সম্বন্ধে কগ ক্ষেত্র তথা গচ ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৫।২২) পরন্তু ট এবং ড মধ্যস্থ সম্বন্ধ ঐ দুই ক্ষেত্রের বাহু মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগ পরিমাণানুযায়ি অতএব কগ গচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের পরস্পর সম্বন্ধ তদ্বাহু মধ্যস্থ সম্বন্ধের যোগ পরিমাণানু-যায়ি উপপন্ন হইল। সুতরাং সমানকোণি ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

---

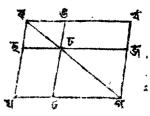
২৪ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কর্ণের পরিতঃ যেহ সমানান্তরাল ক্ষেত্র থাকে তাহারা পরস্পরের এবং সমুদয় ক্ষেত্রের সদৃশ।

কখগঘ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, কগ তাহার কর্ণ, এবং ঙছ জট কর্ণের পরিতস্থ সমানান্তরাল ক্ষেত্র। ঙছ এবং জট দুই

the diameter : the parallelograms EG, HK are similar, both to the whole parallelogram ABCD, and to one another.

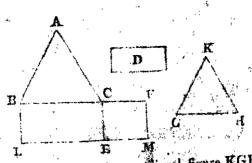
Because DC, GF are parallels, the angle ADC is equal (29. 1.) to the angle AGF : for the same reason, because BC, EF are parallels, the angle ABC is equal to the angle AEF : also the angles BCD, EFG being each equal to the opposite angle DAB (34. 1.), are equal to one another, wherefore the parallelograms ABCD, AEFG are equiangular. And because the angle ABC is equal to the angle AEF, and the angle BAC common to the two triangles BAC, EAF, they are equiangular to one another; therefore (4. 6.) as AB to BC, so is AE to EF : and because the opposite sides of parallelograms are equal to one another (34.1.) AB is (7.5.) to AD as AE to AG ; and DC to CB, as GF to FE ; and also CD to DA, as FG to GA : therefore the sides of the parallelograms ABCD, AEFG about the equal angles are proportionals ; and they are therefore similar to one another (Def. 1. 6.) : for the same reason, the parallelogram ABCD is similar to the parallelogram FHCK. Wherefore each of the parallelograms, GE, KH is similar to DB : but rectilineal figures which are similar to the same rectilineal figure, are also similar to one another (21. 6.) ; therefore the parallelogram GE is similar to KH. Wherefore, parallelograms, &c. Q. E. D.

সমানান্তরাল ক্ষেত্র পরস্পর এবং সমুদয় কথগঘ ক্ষেত্রের সদৃশ হইবে।

ঘগ ছচ পরস্পরের সমানান্তরাল একারণ কঘগ কোণ কছচ কোণের সমান (১।২৯)। তদ্রূপ থগ ঙচ সমানান্তরাল তন্নিমিত্ত কথগ কোণ কঙচ কোণের সমান এবং খগঘ ঙচছ দুই কোণ প্রত্যেকে সম্মুখস্থ ঘকথ কোণের সমান প্রযুক্ত (১।৩৪) পরস্পর সমান সুতরাং কথগঘ এবং কঙচছ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র পরস্পর সমান কোণি। অপর কথগ কোণ কঙ-কোণের সমান এবং থকগ কোণ থকগ ঙকচ দুই ত্রিভুজস্থ আছে একারণ ঐ দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি সুতরাং কথ যথা থগ সম্বন্ধে কঙ তথা ঙচ সম্বন্ধে (৬।৪) এবং সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্মুখস্থ বাহু পরস্পর সমান (১।৩৪) অতএব কথ যথা কঘ সম্বন্ধে কঙ তথা কছ সম্বন্ধে (৫।৭) এবং ঘগ যথচ গথ সম্বন্ধে ছচ তথা চঙ সম্বন্ধে এবং গঘ যথা ঘক সম্বন্ধে চছ তথা ছক সম্বন্ধে সুতরাং কথগঘ কঙচছ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয়, তন্নিমিত্ত ঐ ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ (৬।১ সংজ্ঞা) তদ্রূপ কথগঘ এবং চজগট দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ উপপন্ন হইবে অতএব ছঙ টজ দুই ক্ষেত্র প্রত্যেকে ঘথ ক্ষেত্রের সদৃশ কিন্তু যেং সরল রৈখিক ক্ষেত্র প্রত্যেকে এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ তাহারা পরস্পর সদৃশ একারণ ছঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র টজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সদৃশ। অতএব কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XXV. PROB.

To describe a rectilineal figure which shall be similar to one, and equal to another given rectilineal figure.

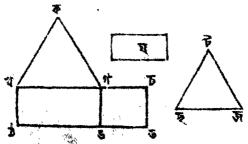
Let ABC be the given rectilineal figure, to which the figure to be described must be similar; and D that to which it must be equal: It is required to describe a rectilineal figure similar to ABC, and equal to D.

Upon the straight line BC describe (Cor. 45. 1.) the parallelogram BE equal to the figure ABC; also upon CE describe the parallelogram CM equal to D, and having the angle FCE equal to the angle CBL: therefore BC and CF are in a straight line (29. 1. 14. 1.), as also LE and EM: between BC and CF find (13. 6.) a mean proportional GH, and upon

GH describe (18. 6.) the rectilineal figure KGH similar, and similarly situated, to the figure ABC. And because BC is to GH as GH to CF, and if three straight lines be proportionals as the first is to the third, so is (2. Cor. 20. 6.) the figure upon the first to the similar and similarly described figure upon the second; therefore as BC to CF, so is the figure ABC to the figure KGH; but as BC to CF, so is (1. 6.) the parallelogram BE to the parallelogram EF: therefore

২৫ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এবং অন্য এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবেক।

কখগ এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র। কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ অথচ ঘ ক্ষেত্রের সমান অন্য এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবেক।

খগ সরল রেখার উপর কখগ ক্ষেত্রের সমান খণ্ড সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত কর (১।৪৫ অনুমান) এবং গণ্ড সরল রেখার উপর ঘ ক্ষেত্রের সমান গড সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত কর তাহার চগণ্ড কোণ যেন গখঠ কোণের সমান হয় তাহাতে খগ গচ এবং ঠণ্ড ণ্ডড এক২ সরল রেখাস্থ হইবে (১।২৯—১।১৪) খগ এবং গচ সরল রেখার মধ্য মধ্য অনুপাতীয় নির্দ্দেশ করিয়া (৬।১৩) তাহার উপর কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ এবং সদৃশাবস্থ টছজ সরল রৈখিক ক্ষেত্র নিষ্কাসিত কর (৬।১৮) অপর খগ যথা ছজ সম্বন্ধে ছজ

তথা গচ সম্বন্ধে কল্পিত হইয়াছে এবং তিন সরল রৈখিক ক্ষেত্র অনুপাতীয় হইলে প্রথম যথা তৃতীয় সম্বন্ধে প্রথমোপরিস্থ ক্ষেত্র তথা দ্বিতীয়োপরিস্থ তৎ সদৃশ ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৬।২০ দ্বিতীয় অনুমান) এ কারণ খগ যথা গচ সম্বন্ধে কখগ ক্ষেত্র তথা টছজ সম্বন্ধে। পরন্তু খগ যথা গচ সম্বন্ধে খণ্ড

as the figure ABC is to the figure KGH, so is the parallelogram BE to the parallelogram EF (11. 5.): but the rectilineal figure ABC is equal to the parallelogram BE; therefore the rectilineal figure KGH is equal (14.5.) to the parallelogram EF: but EF is equal to the figure D; wherefore also KGH is equal to D; and it is similar to ABC. Therefore, the rectilineal figure KGH has been described similar to the figure ABC, and equal to D. *Which was to be done.*

PROP. XXVI. THEOR.

If two similar parallelograms have a common angle, and be similarly situated, they are about the same diameter.

Let the parallelograms ABCD, AEFG be similar and similarly situated, and have the angle DAB common: ABCD and AEFG are about the same diameter.

For, if not, let, if possible, the parallelogram BD have its diameter AHC in a different straight line from AF, the diameter of the parallelogram EG, and let GF meet AHC in H; and through H draw HK parallel to AD or BC; therefore the parallelograms ABCD, AKHG being about the same diameter, are similar to one another (24. 6.): wherefore, as DA to

সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা ঙচ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সম্বন্ধে (৬।১) অতএব কখগ ক্ষেত্র যথা টছজ ক্ষেত্র সম্বন্ধে খঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্র তথা ঙচ সম্বন্ধে (১।১১) অধিকন্তু কখগ সরল রৈখিক ক্ষেত্র খঙ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান অতএব টছজ ক্ষেত্র ঙচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান (৫।১৪) এবং ঙচ ঘ সমান হওয়াতে টছজ ক্ষেত্রও ঘ সমান উপপন্ন হইল এবং পূর্ব্বে তাহা কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ সপ্রমাণ হইয়াছে। অতএব টছজ সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ এবং ঘ ক্ষেত্রের সমান রূপে নিষ্কাশিত হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

---

২৬ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই সদৃশ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের যদি এক সামান্য কোণ থাকে এবং উভয় যদি সদৃশাবস্থ হয় তবে তাহারা এক কর্ণের পরিতস্থ হইবে।

কখগঘ এবং কঙচছ দুই সদৃশ এবং সদৃশাবস্থ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের দকখ এক সামান্য কোণ কল্পনা কর। কখগঘ এবং কঙচছ উভয়ে এক কর্ণের পরিতস্থ হইবে।

যদি স্যাৎ তাহা না হয় তবে ঙছ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কচ কর্ণ হইতে স্বতন্ত্র সরল রেখায় খঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কজগ কর্ণ কল্পনা কর এবং জ বিন্দুতে কজগ ও ছচ সরল রেখার সম্পাত হউক। জ বিন্দু দিয়া টজ সরল রেখা কখ অথবা ঘগ রেখার সমানান্তরালরূপে নিষ্কাশিত কর তাহাতে কখগঘ এবং কটজছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র এক কর্ণের পরিতস্থ প্রযুক্ত পরস্পর সদৃশ হইবে (৬।২৪) অতএব ঘক যথা কখ সম্বন্ধে ছক তথা কট সম্বন্ধে কহা যাইতে পারে (৬।১ সংজ্ঞা) পরন্তু

ক ছ ঘ
ট জ
ঙ চ
খ গ

AB, so is (Def. 1. 6.) GA to AK: but because ABCD and AEFG are similar parallelograms, as DA is to AB, so is GA to AE; therefore (11. 5.) as GA to AE, so is GA to AK; wherefore GA has the same ratio to each of the straight lines AE, AK; and consequently AK is equal (9. 5.) to AE, the less to the greater, which is impossible: therefore ABCD and AKHG are not about the same diameter; wherefore ABCD and AEFG must be about the same diameter. Therefore, if two similar, &c. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

Of all the rectangles contained by the segments of a given straight line, the greatest is the square which is described on half the line.

Let AB be a given straight line, which is bisected in C, and let D be any point in it; the square on AC is greater than the rectangle AD.DB.

A C D B

For, since the straight line AB is divided into two equal parts in C, and into two unequal parts in D, the rectangle contained by AD and DB together with the square of CD, is equal to the square of AC (5. 2.). The square of AC is therefore greater than the rectangle AD.DB. Therefore, &c. Q. E. D.

পূর্ব্ব কল্পনানুসারে কখগঘ এবং কঙচছ পরস্পর সদৃশ একারণ ঘক যথা কখ সম্বন্ধে ছক তথা কঙ সম্বন্ধে নিশ্চিত হইতেছে (৫।১১) সুতরাং ছক যথা কট সম্বন্ধে ছক তথা কঙ সম্বন্ধে অর্থাৎ কট কঙ দুই রেখার সম্বন্ধে ছক রেখার নিষ্পত্তি পরিমাণ সমান সুতরাং কট এবং কঙ পরস্পর সমান হয় (৫।৯) কিন্তু তাহা অসাধ্য কেননা লঘুতর বৃহত্তরের সমান হয় না অতএব কখগঘ কটজছ উভয়ে এক কর্ণের পরিতস্থ হইতে পারে না সুতরাং কখগঘ কঙচছ অবশ্য এক কর্ণের পরিতস্থ হইবে। অতএব দুই সদৃশ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

২৭ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার দ্বিবিধ খণ্ডে যেং আয়ত সম্ভাব্য হয় ঐ সরল রেখার অর্দ্ধের উপরিস্থ সম চতুর্ভুজ তৎ সর্ব্বাপেক্ষা বৃহত্তম হইবে।

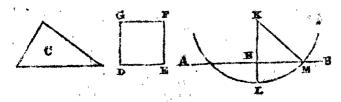
কখ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে এবং ঘ তন্মধ্যস্থ অপর বিন্দু। কখ রেখার সমচতুর্ভুজ কঘ. ঘখ আয়ত অপেক্ষা বৃহৎ হইবে।

ক গ ঘ খ

কেননা কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে এবং ঘ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হওয়াতে কঘ এবং ঘখ খণ্ডের আয়ত এবং গঘ খণ্ডের সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কগ রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে (২।৫) সুতরাং কগ সমচতুর্ভুজ কঘ.ঘখ আয়তাপেক্ষা বৃহৎ হইবে। অতএব কোন নির্দ্দিষ্ট ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. XXVIII. PROB.

To divide a given straight line, so that the rectangle contained by its segments, may be equal to a given rectilineal figure, but that figure must not be greater than the square of half the given line.*

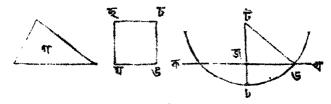
Let AB be the given straight line, and C the

* Playfair, who substituted this proposition in his edition instead of the original Prop. XXVIII of Euclid, which he rightly describes as unnecessarily complex for beginners, has committed an inaccuracy, in not limiting the kind of figure, to which the rectangle contained by the segments of the divided line is to be made equal. Euclid observes as a strict rule throughout his work never to direct any thing to be done, which he has not either shown how to do in an earlier problem or assumed as possible to be done, by one of his postulates. By not limiting the given space to rectilineal space, Playfair tacitly assumes that a square can always be found equal to any given space, which is not true.

২৮ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত করিয়া ভাগ করিতে হইবে যে দুই খণ্ডের আয়ত এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের* সমান হয় অথচ ঐ ক্ষেত্র অর্দ্ধ রেখার সম চতুর্ভুজ অপেক্ষা অধিক হইতে না পারে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং গ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের সমান ঘঙচছ এক সমচতুর্ভুজ নিষ্কাসন কর (৬২৫) অপর কখ সরল রেখাকে জ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর কজ রেখার সমচতুর্ভুজ যদি ঘঙচছ সমচতুর্ভুজের সমান হয় তবে

অভীষ্ট সিদ্ধির অপেক্ষা নাই যদি সমান না হয় তবে কল্পনানুসারে কজ রেখার সমচতুর্ভুজ ঘঙচছ হইতে অবশ্য

---

* প্লেফেয়ার ইউক্লিডের মূল গ্রন্থোক্ত ২৮ প্রতিজ্ঞার পরিবর্ত্তে এই প্রতিজ্ঞা রচনা করিয়াছেন তিনি কহেন ইউক্লিড প্রণীত প্রতিজ্ঞা নব্য পাঠকের পক্ষে অত্যন্ত কঠিন; তাহা যথার্থ বটে কিন্তু বিভক্ত রেখার খণ্ডের আয়ত কীদৃশ ক্ষেত্রের সমান হইবে তাহা স্থির না করাতে তাঁহার রচনায় দোষস্পর্শ হয়। ইউক্লিড পূর্ব্ববর্ত্তি কোন প্রতিজ্ঞায় যে বিষয় সম্পাদন করিবার ধারা প্রকাশ করেন নাই অথবা সহজে সম্পাদ্য বলিয়া স্বীকার করেন নাই কথন তাহার ন্যাস উল্লেখ করেন না। প্লেফেয়ার উক্ত ক্ষেত্রকে সরল রৈখিক বলিয়া বিশেষণ না করাতে আপাততঃ অঙ্গীকার করিতেছেন যে সর্ব্ব প্রকার ক্ষেত্রের তুল্য সম চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা যায় কিন্তু তাহা বাস্তবিক সত্য নহে।

given rectilineal figure. Describe a square DEFG equal to C (25. 6.)

Bisect AB in H, and if the square upon AH is equal to DEFG, the thing required is done. But if they are not equal, the square upon AH is greater than DEFG, by the condition; and therefore AH is greater than DE, the side of the square DEFG. Draw HK at right angles to AB and equal to DE; and produce KH to L so that KL be equal to AH or HB; and from the centre K at the distance KL, describe a circle meeting AB in M. Join KM; and because AB is divided equally in H, and unequally in M, $AM.MB + HM^2 = AH^2$ (5. 2.) $= KM^2$. But $KH^2 + HM^2 = KM^2$ (47 1.); therefore $AM.MB + HM^2 = KH^2 + HM^2$, and taking away HM^2, $AM.MB = KH^2$. Now $KH = DE$, and therefore $KH^2 = DE^2$. But the square of DE is equal to the rectilineal figure C; hence $AM.MB = C$; wherefore the given straight line AB is divided in M so that the rectangle contained by the segments AM, MB is equal to the given rectilineal figure C. *Which was to be done.*

PROP. XXIX. PROB.

*To produce a given straight line, so that the rectangle contained by the segments between the extremities of the given line, and the point to which it is produced, may be equal to a given rectilineal figure.**

* Here too Playfair says simply "a given space" without limiting it. See preceding note.

অধিক হইবে সুতরাং ঘণ্ডচছ চতুর্ভুজের ঘঙ বাহু হইতে কজ বৃহত্তর হইবে।

কখ রেখার লম্বভাবে জট নিষ্কাশিত করিয়া তাহা ঘঙ সমান কর এবং টজ রেখাকে ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর যেন টঠ কজ অথবা জখ সমান হয়। অনন্তর ট কেন্দ্র করিয়া টঠ পর্য্যন্ত বৃত্ত অঙ্কিত করত ডিন্দুতে সেই বৃত্তের কখ রেখোপরি সম্পাত হউক পরে টড সংযুক্ত কর। কখ রেখা জ চিহ্নে সমান ভাবে এবং ড চিহ্নে অসমান ভাবে বিভক্ত হইয়াছে একারণ কড.ডখ + জড² = কজ² (৫।২) = টড²। অপর টজ² + জড² = টড² (১।৪৭) সুতরাং কড.ডখ + জড² = টজ² + জড² এবং জড² বিয়োগ করিলে কড.ডখ = টজ²। অধিকন্তু টজ = ঘঙ সুতরাং টজ² = ঘঙ²। কিন্তু ঘঙ রেখার সম চতুর্ভুজ গ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের তুল্য তন্নিমিত্ত কড.ডখ = গ অতএব নির্দ্দিষ্ট কখ সরল রেখা ড বিন্দুতে এমত প্রকারে বিভক্ত হইয়াছে যে কড এবং ডখ দুই খণ্ডের আয়তগ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

---

২৯ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

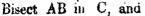
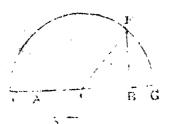
এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত করিয়া বৃদ্ধি করিতে হইবে যে ঐ রেখার দুই প্রান্ত এবং বৃদ্ধির সীমা মধ্যস্থ দুই খণ্ডের আয়ত নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের তুল্য হয়।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। বর্দ্ধিতব্য কখ রেখার খণ্ডের আয়ত যে সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইবে তত্তুল্য এক সম চতুর্ভুজ কল্পনা কর (৬।২৫)। ঘঙ সরল রেখা ঐ চতুর্ভুজের বাহু হউক।

---

* প্লেফেয়ার এস্থলেও সাধারণ রূপে কহেন "এক নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্র" পূর্ব্ব টীকায় দৃষ্টি কর।

Let AB be the given straight line; find a square

equal to the rectilineal figure to which the rectangle under the segments of AB produced, must be equal (25. 6.); and let the straight line DE be the side of that square.

Bisect AB in C, and draw BF at right angles to AB, and take BF equal to DE. Join CF and from the centre C, at the distance CF, describe a circle meeting AB produced in G. And because AB is bisected in C, and produced to G, $AG.GB+CB^2=CG^2$ (6.2.) $=CF^2$. But $CF^2=CB^2+BF^2$ (47. 1.), therefore $AG.GB+CB^2=BF^2+CB^2$ and $AG.GB=BF^2$. Now $BF=DE$ hence $BF^2=DE^2$. But the square upon the straight line DE is equal to the rectilineal figure to which the rectangle contained by the segments of AB produced is to be equal; wherefore the straight line AB is produced to G so that the rectangle AG.GB is equal to the given rectilineal figure. Which was to be done.

Scholium. It is to be noticed that in this proposition, the magnitude of the given rectilineal figure is not limited as in the last problem.

PROP. XXX. PROB.

To cut a given straight line in extreme and mean ratio.

Let AB be the givin straight line; it is required to cut it in extreme and mean ratio.

Upon AB describe (46. 1.) the square BC, and produce CA to D, so that the rectangle CD.DA may

কখ সরল রেখাকে গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করিয়া খচ তাহার লম্ব নিষ্কাসিত কর যেন খচ ঘঙ সমান হয় পরে গচ সংযুক্ত করিয়া গ কেন্দ্র হইতে গচ পর্য্যন্ত বৃত্ত অঙ্কিত কর কখ সরল রেখা বর্দ্ধিত হইয়া ছ বিন্দুতে ঐ বৃত্ত সংলগ্ন হউক। অপর কখ গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ছ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে একারণ কছ. ছখ + গখ^{২} = গছ^{২} (২।৬) = গচ^{২}। পরন্তু গচ^{২} = গখ^{২} + খচ^{২} (১।৪৭) সুতরাং কছ. ছখ + গখ^{২} = গখ^{২} + খচ^{২} এবং কছ. ছখ = খচ^{২}। অধিকন্তু খচ = ঘঙ সুতরাং খচ^{২} = ঘঙ^{২}। অপর বর্দ্ধিতব্য কখ রেখার খণ্ডের আয়ত যে সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইবে ঘঙ রেখার সমচতুর্ভুজ তত্তুল্য অতএব কখ সরল রেখা এমত প্রকারে ছ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে যে বর্দ্ধিত রেখার কছ এবং ছখ খণ্ডের আয়ত নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

টীকা। পাঠকবর্গ এস্থলে বুঝিবেন যে পূর্ব্ববর্ত্তি প্রতিজ্ঞাতে যেমত নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের পরিমাণ নির্দ্ধারিত হইয়াছিল এ প্রতিজ্ঞায় সেরূপ হয় নাই।

৩০ প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় করিয়া ছেদ করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, তাহাকে অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় করিয়া ছেদ করিতে হইবে।

কখ রেখার উপর খগ সম চতুর্ভুজ নিষ্কাসিত কর (১।৪৬) এবং গক ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর যেন গঘ.ঘক আয়ত খগ সম

be equal to the square CB (29. 6.). Take AE equal to AD, and complete the rectangle DF under DC and AE, or under DC and DA. Then, because the rectangle CD.DA is equal to the square CB, the rectangle DF is equal to CB. Take away the common part CE from each, and the remainder FB is equal to the remainder DE. But FB is the rectangle contained by FE and EB, that is, by AB and BE; and DE is the square upon AE; therefore AE is a mean proportional between AB and BE (17. 6.), or AB is to AE as AE to EB. But AB is greater than AE; therefore AE is greater than EB (14. 5.): Therefore the straight line AB is cut in extreme and mean ratio in E (Def. 3. 6.). *Which was to be done.*

Otherwise:

Let AB be the given straight line; it is required to cut it in extreme and mean ratio.

Divide AB in the point C, so that the rectangle contained by AB.BC may be equal to the square of AC (11. 2.); Then, because the rectangle AB.BC is equal to the square of AC, as BA to AC, so is AC to CB (17. 6.); Therefore AB is cut in extreme and mean ratio in C (11. 2.). *Which was to be done.*

চতুর্ভুজ তুল্য হয় (৬।২৯) এবং কঙ ঘক সমান ছেদ করিয়া খগ এবং কঙ অথবা খগ এবং খক রেখার আয়ত ঘচ পূর্ণ কর। খগ.খক আয়ত খগ সমচতুর্ভুজের সমান হওয়াতে ঘচ আয়ত ক্ষেত্র খগ সমান হইয়াছে ঐ দুই ক্ষেত্রের কচ সামান্যাংশ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ঘঙ এবং খচ সমান হইবে। পরন্তু খচ ক্ষেত্র চঙ এবং ঙখ অর্থাৎ কখ এবং খঙ রেখার আয়ত এবং ঘঙ কঙ রেখার সমচতুর্ভুজ অতএব কঙ রেখা কখ এবং খঙ রেখার মধ্য অনুপাতীয় (৬।১৭) অর্থাৎ কখ যথা কঙ সম্বন্ধে কঙ তথা খঙ সম্বন্ধে সপ্রমাণ হইল। অপর কখ কঙ অপেক্ষা বৃহৎ সুতরাং কঙ খঙ অপেক্ষা বৃহৎ হইবে (৫।১৪)। অতএব কখ সরল রেখা ঙ বিন্দুতে অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন হইল (৬।৩ সংজ্ঞা)। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

প্রকারান্তর।

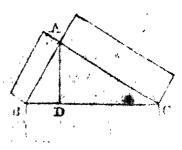
কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন করিতে হইবে।

কখ রেখাকে গ বিন্দুতে এমত করিয়া ছিন্ন কর যে কখ.খগ আয়ত কগ সরল রেখার সম চতুর্ভুজ সমান হয় (২।১১) অপর কখ.খগ আয়ত কগ রেখার সম চতুর্ভুজ তুল্য একারণ খক যথা কগ সম্বন্ধে কগ তথা গখ সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে (৬।১৭) অতএব কখ সরল রেখা অন্ত্য এবং মধ্য অনুপাতীয় রূপে ছিন্ন হইল। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

PROP. XXXI. THEOR.

In right angled triangles, the rectilineal figure described upon the side opposite to the right angle, is equal to the similar, and similarly described figures upon the sides containing the right angle.

Let ABC be a right angled triangle, having the right angle BAC: The rectilineal figure described upon BC is equal to the similar, and similarly described figures upon BA, AC.

Draw the perpendicular AD; therefore, because in right angled triangle ABC, AD is drawn from right angle at A perpendicular to the base BC, the triangles ABD, ADC are similar to the whole triangle ABC, and to one another (8. 6.); and because the triangle ABC, is similar to ADB, as CB to BA, so is BA to BD (4. 6.); and because these three straight lines are proportionals, as the first to the third, so is the figure upon the first to the similar, and similarly described figure upon the second (2. Cor.): Therefore, as CB to BD, so is the figure upon CB to the similar and similarly described figure upon BA: and inversely (B. 5.), as DB to BC, so is the figure upon BA to that upon BC; for the same reason, as DC to CB, so is the figure upon CA to that upon CB. Wherefore, as BD and DC

together to BC, so are the figures, upon BA and on AC

৩১ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুর উপরি নিষ্কাসিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমকোণের পার্শ্বস্থ দুইবাহুর উপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশ রূপে নিষ্কাসিত দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান হয়।

কখগ সমকোণি ত্রিভুজ তাহার মধ্যে খকগ সমকোণ। খগ বাহুর উপরি নিষ্কাসিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখ এবং কগ বাহুর উপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশরূপে নিষ্কাসিত দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমান হইবে।

কঘ লম্বপাত কর। অপর কখগ সমকোণি ত্রিভুজের সমকোণ ক হইতে খগ ভূমির উপর লম্বপাত হইয়াছে একারণ কখঘ কঘগ দুই ত্রিভুজ সমুদয় কখগ ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সদৃশ হইল (৬।৮) এবং কখগ ত্রিভুজ কঘখ ত্রিভুজের সদৃশ হওয়াতে খগ যথা খক সম্বন্ধে খক তথা খঘ সম্বন্ধে (৬।৪) এবং যদি তিন সরল রেখা অনুপাতীয় হওয়াতে প্রথম যথা তৃতীয় সম্বন্ধে প্রথমোপরিস্থ ক্ষেত্র

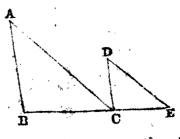
তথা দ্বিতীয়োপরিস্থ তৎসদৃশ এবং তাদৃশ রূপে নিষ্কাসিত ক্ষেত্রের সম্বন্ধে (৬।২০ দ্বিতীয় অনুমান)। অতএব গখ যথা খঘ সম্বন্ধে গখ উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা খক উপরিস্থ তৎসদৃশ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে এবং বিলোম নিষ্পত্তিতে (৬।খ) ঘখ যথা খগ সম্বন্ধে খক উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে। তদ্রূপ ঘগ যথা খগ সম্বন্ধে গক উপরিস্থ ক্ষেত্র তথা গখ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে। অতএব (৫।২৪) খঘ এবং ঘগ দুই ক্ষেত্রের একত্র যোগ যথা

together, to the figure upon BC (24. 5): therefore, the figures on BA, and on AC, are together equal to that on BC; and they are similar figures. Wherefore, in right angled triangles, &c. Q. E. D.

PROP. XXXII. THEOR

If two triangles which have two sides of the one proportional to two sides of the other, be joined at one angle, so as to have their homologous sides parallel to one another; the remaining sides shall be in a straight line.

Let ABC, DCE be two triangles which have two sides BA, AC proportional to the two CD, DE, viz. BA to AC, as CD to DE, and let AB be parallel to DC, and AC to DE; BC and CE are in a straight line.

Because AB is parallel to DC, and the straight line AC meets them, the alternate angles BAC, ACD are equal (29. 1.); for the same reason, the angle CDE is equal to the angle ACD; wherefore also BAC is equal to CDE: And because the triangles ABC, DCE have one angle at A equal to one at D, and the sides about these angles proportionals, viz. BA to AC, as CD to DE, the triangle ABC is equiangular (6. 6.) to DCE: Therefore the angle ABC is equal to the angle DCE: And the angle BAC was proved to be equ

খগ সম্বন্ধে খক এবং কগ উপরিস্থ দুই ক্ষেত্রের একত্র যোগ তথা খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সম্বন্ধে উপপন্ন হইল সুতরাং খক এবং কগ উপরিস্থ দুই ক্ষেত্র খগ উপরিস্থ ক্ষেত্রের সমান নিশ্চিত হইল আর তাহারা পরস্পর সদৃশও বটে। অতএব ত্রিভুজে ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

৩২ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের যদি দুই২ বাহু অনুপাতীয় হয় এবং তাহারা এক কোণে পরস্পর সংলগ্ন প্রযুক্ত যদি স্বর্গীয় বাহু পরস্পরের সমানান্তরাল হয় তবে তাহারদের অবশিষ্ট বাহু এক সরল রেখায় থাকিবে।

কখগ এবং ঘগঙ দুই ত্রিভুজের খক কগ বাহু গঘ ঘঙ বাহুর অনুপাতীয় কল্পনা কর অর্থাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে গঘ তথা ঘঙ সম্বন্ধে জ্ঞান কর এবং কখ ঘগ ও কগ ঘঙ পরস্পরের সমানান্তরাল কল্পনা কর খগঙ রেখা উপপন্ন হইবে।

কখ ঘগ পরস্পর সমানান্তরাল এবং তাহারদের উপর কগ রেখার সম্পাত হইয়াছে একারণ খকগ কোণ অপর পার্শ্বস্থ কগঘ সমান (১২৯) ঐ কারণ গঘঙ কোণ কগঘ কোণের সমান সুতরাং খকগ এবং গঘঙ পরস্পর সমান। অপিচ কখগ ঘগঙ দুই ত্রিভুজের ক এবং ঘ কোণ সমান এবং ঐ সমান২ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে অর্থাৎ খক যথা কগ সম্বন্ধে গঘ তথা ঘঙ সম্বন্ধে কল্পিত হওয়াতে কখগ এবং গঘঙ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণি

to ACD: Therefore the whole angle ACE is equal to the two angles ABC, BAC; add the common angle ACB, then the angles ACE, ACB are equal to the angles ABC, BAC, ACB: But ABC, BAC, ACB are equal to two right angles (32. 1.); therefore also the angles ACE, ACB are equal to two right angles: And since at the point C, in the straight line AC, the two straight lines BC, CE, which are on the opposite sides of it, make the adjacent angles ACE, ACB equal to two right angles; therefore (14. 1.) BC and CE are in a straight line. Wherefore, if two triangles, &c. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

In equal circles, angles, whether at the centres or circumferences, have the same ratio which the arches, on which they stand, have to one another: So also have the sectors.

Let ABC, DEF be equal circles; and at their centres the angles BGC, EHF, and the angles BAC, EDF, at their circumferences; as the arch BC to the arch EF, so is the angle BGC to the angle EHF, and the angle BAC to the EDF: and also the sector BGC to the sector EHF.

Take any number of arches CK, KL, each equal to BC, and any number whatever, FM, MN, each equal to EF; and join GK, GL, HM, HN. Because the arches BC, CK, KL are all equal, the angles BGC, CGK, KGL are also all equal (27. 3.): Therefore,

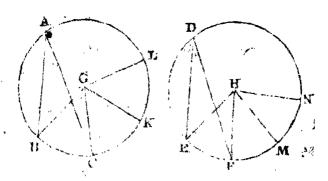
উপপন্ন হইতেছে (৬।৬) একারণ কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হইল এবং পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে খকগ কোণ গঘঙ কোণ সমান অতএব সমুদয় কগঙ কোণ খকগ এবং কখগ দুই কোণের তুল্য তাহাতে খগক কোণ যোগ করিলে কগঙ এবং কগখ দুই কোণ খকগ কখগ এবং কগখ তিন কোণের সমান হয় পরন্তু খকগ কখগ এবং কগখ তিন কোণ দুই সমকোণ তুল্য (১।৩২) অতএব কগঙ এবং কগখ দুই সমকোণ তুল্য এবং কগ রেখাস্থ গ বিন্দুতে খগ গঙ দুই সরল রেখা ভিন্নং পার্শ্ব হইতে আসিয়া কগঙ এবং কগখ দুই সংলগ্ন কোণকে একত্র দুই সমকোণ তুল্য করিতেছে একারণ খগ এবং গঙ এক সরল রেখাস্থ সপ্রমাণ হইল (১।১৪)। অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

৩৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

সমানং বৃত্তেতে কেন্দ্রস্থ অথবা পরিধিস্থ কোণ যেং চাপের উপর থাকে পরস্পরের সম্বন্ধে তদনুযায়ি নিষ্পত্তি পরিমাণ ধারণ করে। বৃত্ত চ্ছেদকের বিষয়েও এইরূপ হয়।

কখগ ঘঙচ দুই সমানং বৃত্ত, খছগ এবং ঙজচ তাহারদের কেন্দ্রস্থ কোণ এবং খকগ ও ঙঘচ পরিধিস্থ কোণ। খগ চাপ যথা ঙচ চাপ সম্বন্ধে খছগ কোণ তথা ঙজচ সম্বন্ধে এবং খকগ ঙঘচ সম্বন্ধে। আর খছগ বৃত্তচ্ছেদকও তথা ঙজচ বৃত্তচ্ছেদক সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে।

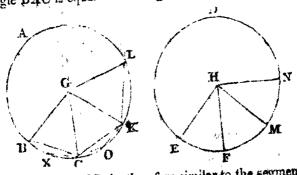
খগ চাপের সমানং কএক চাপ যথা গট টঠ এবং ঙচ চাপের সমানং কএক চাপ যথা চড ডঢ কল্পনা করিয়া ছট ছঠ জড জঢ সংযুক্ত কর। খগ গট টঠ চাপ পরস্পর সমান একারণ খছগ গছট টছঠ কোণও পরস্পর সমান হইবে (৩।২৭) অতএব খঠ চাপ যে পরিমাণে খগ চাপের অপবর্ত্ত্য খছঠ কোণও সেই পরিমাণে খছগ কোণের অপবর্ত্ত্য। তদ্রূপ ঙঢ চাপ যে পরিমাণে ঙচ চাপের অপবর্ত্ত্য

what multiple soever the arch BL is of the arch BC,

the same multiple is the angle BGL of the angle BGC: for the same reason, whatever multiple the arch EN is of the arch EF, the same multiple is the angle EHN of the angle EHF. But if the arch BL be equal to the arch EN, the angle BGL is also equal (27. 3.) to the angle EHN: or if the arch BL be greater than EN, likewise the angle BGL is greater than EHN; and if less, less: There being then four magnitudes, the two arches BC, EF, and the two angles BGC, EHF; and of the arch BC, and of the angle BGC have been taken any equimultiples whatever, viz. the arch BL, and the angle BGL: and of the arch EF, and of the angle EHF, any equimultiples whatever, viz. the arch EN, and the angle EHN: And it has been proved, that if the arch BL be greater than EN, the angle BGL is greater than EHN; and if equal, equal; and if less, less: As, therefore, the arch BC to the arch EF, so (Def. 5. 5.) is the angle BGC to the angle EHF: But as the angle BGC is to the angle EHF, so is (15. 5.) the angle BAC to the angle EDF, for each is double of each (20. 3.): Therefore, as the circumference BC is to EF, so is the angle BGC to the angle EHF, and the angle BAC to the angle EDF.

ঙজচ কোণও সেই পরিমাণে ঙজচ কোণের অপবর্ত্ত্য। পরন্তু খঠ চাপ ঙচ চাপের সমান হইলে খছঠ কোণও ঙজচ কোণের সমান হইবে (৩।২৭) অথবা খঠ চাপ ঙচ চাপের অধিক

হইলে খছঠ কোণও ঙজচ কোণের অধিক হইবে এবং উক্ত চাপ ন্যূন হইলে কোণও তদ্রূপ ন্যূন হইবে। অতএব এস্থলে চারি রাশি নির্দ্দিষ্ট হইতেছে অর্থাৎ খগ ঙচ দুই চাপ এবং খছগ ও ঙজচ দুই কোণ এবং খগ চাপ ও খছগ কোণের দুই সম অপবর্ত্ত্য খঠ চাপ এবং খছঠ কোণ তথা ঙচ চাপ এবং ঙজচ কোণের দুই সম অপবর্ত্ত্য ঙচ চাপ এবং ঙজচ কোণ নিশ্চিত হইয়াছে এবং ইহাও সপ্রমাণ হইয়াছে যে খঠ চাপ ঙচ চাপের সমান অথবা ন্যূনাধিক হইলে খছঠ কোণও ঙজচ কোণের সমান অথবা ন্যূনাধিক হইবে অতএব খগ চাপ যথা ঙচ চাপের সম্বন্ধে খছগ কোণ তথা ঙজচ কোণের সম্বন্ধে হইবে (৫।৫ সংজ্ঞা) অধিকন্তু খছগ কোণ যথা ঙজচ সম্বন্ধে খকগ কোণ তথা ঙঘচ সম্বন্ধে (৫।১৫) কেননা প্রথমোক্ত দুই কোণ ক্রমশঃ অপর দুই কোণের দ্বিগুণ (৩।২০) অতএব খগ চাপ যথা ঙচ চাপ সম্বন্ধে খছগ কোণ তথা ঙজচ কোণ সম্বন্ধে এবং খকগ কোণ তথা ঙঘচ কোণ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল।

অপিচ খগ চাপ যথা ঙচ চাপ সম্বন্ধে খছগ বৃত্তচ্ছেদক তথা ঙজচ বৃত্তচ্ছেদক সম্বন্ধে উপপন্ন হইবে। খগ এবং গট সংযুক্ত

Also, as the arch BC to EF, so is the sector BGC to the sector EHF. Join BC, CK, and in the arches BC, CK take any points X, O, and join BX, XC, CO, OK: Then, because in the triangles GBC, GCK, the two sides BG, GC are equal to the two CG, GK, and also contain equal angles; the base BC is equal (4. 1.) to the base CK, and the triangle GBC to the triangle GCK: And because the arch BC is equal to the arch CK, the remaining part of the whole circumference of the circle ABC is equal to the remaining part of the whole circumference of the same circle: Wherefore the angle BXC is equal to the angle COK (27. 3.); and

the segment BXC is therefore similar to the segment COK (Def. 9. 3.), and they are upon equal straight lines BC, CK: But similar segments of circles upon equal straight lines are equal (24. 3.) to one another: Therefore the segment BXC is equal to the segment COK: And the triangle BGC is equal to the triangle CGK; therefore the whole, the sector BGC is equal to the whole, the sector CGK. For the same reason, the sector KGL is equal to each of the sectors BGC, CGK: and in the same manner, the sectors EHF, FHM, MHN may be proved equal to one another, Therefore, what multiple soever the arch BL is of the arch BC, the same multiple is the sector BGL of the sector BGC. For the same reason, whatever multiple the arch EN is of EF, the same multiple is the

কর এবং খগ গট দুই চাপে ভ ণ এক২ বিন্দু নির্দ্দেশ করিয়া খভ ভগ গণ ণট সংযুক্ত কর। অপর খছগ গজট ত্রিভুজে খছ ছগ এবং গজ জট দুই২ বাহু এবং ঐ২ বাহুর মধ্যবর্ত্তি এক২ কোণ সমান হওয়াতে খগ ভূমি গট ভূমির এবং খছগ ত্রিভুজ গজট ত্রিভুজের সমান হইবে (১২)। অধিকন্তু খগ চাপ গট চাপের

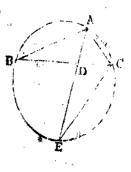
সমান হওয়াতে কখগ বৃত্তপরিধিতে তাহাদের অবশিষ্ট অংশও পরস্পর সমান হইবে একারণ খভগ কোণ গণট কোণের সমান (৩।২৭) সুতরাং খভগ বৃত্তখণ্ড গণট বৃত্তখণ্ডের সদৃশ (৩ ৯সং) পরন্তু ঐ দুই খণ্ড খগ গট সমান রেখার উপরিস্থ আছে আর সদৃশ বৃত্তখণ্ড সমান২ সরল রেখার উপরিস্থ হইলে পরস্পর সমান হয় (৩।২৪) অতএব খভগ বৃত্তখণ্ড গণট খণ্ডের সমান হইবে। অপর খছগ ত্রিভুজও গজট ত্রিভুজের সমান উপপন্ন হইয়াছে অতএব খছগ সমুদয় বৃত্ত ছেদক গজট বৃত্ত ছেদকের সমান সপ্রমাণ হইল. ঐ কারণে টজঠ বৃত্ত ছেদক খছগ অথবা গজট বৃত্ত ছেদকের সমান হইবে। তদ্রূপ ঙজচ চজড ডজঢ তিন বৃত্ত ছেদকও পরস্পর সমান উপপন্ন হইবে অতএব খঠ চাপ যে পরিমাণে খগ চাপের অপবর্ত্ত্য খছঠ বৃত্তছেদকও সেই পরিমাণে খছগ বৃত্ত ছেদকের অপবর্ত্ত্য হইবে। ঐ কারণে ঙঢ চাপ যে পরিমাণে ঙচ চাপের অপবর্ত্ত্য ঙজঢ বৃত্ত ছেদকও সেই পরিমাণে ঙজচ বৃত্ত ছেদকের অপবর্ত্ত্য হইবে। অপর খঠ চাপ যদি ঙঢ চাপের সমান হয় তবে

sector EHN of the sector EHF: Now, if the arch BL be equal to EN, the sector BGL is equal to the sector EHN; and if the arch BL be greater than EN, the sector BGL is greater than the sector EHN; and if less, less: Since, then, there are four magnitudes, the two arches BC, EF, and the two sectors BGC, EHF; and of the arch BC, and sector BGC, the arch BL and the sector BGL are any equimultiples whatever: and of the arch EF, and sector EHF, the arch EN and sector EHN are any equimultiples whatever and it has been proved that if the arch BL be greater than EN, the sector BGL is greater than the sector EHN: if equal, equal; and if less, less; therefore (Def. 5. 5.), as the arch BC is to the arch EF, so is the sector BGC to the sector EHF. Wherefore in equal circles, &c. Q. E. D

PROP. B. THEOR.

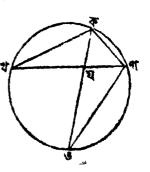
If an angle of a triangle be bisected by a straight line which likewise cuts the base; the rectangle contained by the sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the segments of the base, together with the square of the straight line bisecting the angle.

Let ABC be a triangle, and let the angle BAC be bisected by the straight line AD; the rectangle BA.AC is equal to the rectangle BD.DC, together with the square of AD.

Describe the circle (5. 4.) ACB about the triangle, and produce AD to the circumference in E, and join EC. Then, because the angle

খছঠ বৃত্ত ছেদকও ঙজচ বৃত্ত ছেদকের সমান হইবে এবং খঠ চাপ যদি ঙচ চাপের অধিক হয় তবে খছঠ বৃত্ত ছেদকও ঙজচ বৃত্ত ছেদকের অধিক হইবে আর ঐ চাপ ন্যূন হইলে বৃত্ত ছেদকও ন্যূন হইবে অতএব এস্থলে চারি রাশির নির্দ্দেশ হইল অর্থাৎ খগ ঙচ দুই চাপ এবং খছগ ঙজচ দুই বৃত্ত ছেদক। খগ চাপের ও খছগ বৃত্ত ছেদকের খঠ চাপ এবং খছঠ বৃত্ত ছেদক যে কোন প্রকারে সম অপবর্ত্ত্য তথা ঙচ চাপের এবং ঙজচ বৃত্ত ছেদকের ঙচ চাপ এবং ঙজচ বৃত্ত ছেদক তদ্রূপ সম অপবর্ত্ত্য সিদ্ধ হইয়াছে এবং ইহাও সপ্রমাণ হইয়াছে যে খঠ চাপ ঙচ চাপের সমান অথবা ন্যূনাধিক হইলে খছঠ বৃত্ত ছেদকও ঙজচ বৃত্ত ছেদকের সমান অথবা ন্যূনাধিক হইবে সুতরাং খগ চাপ যথা ঙচ চাপ সম্বন্ধে খছগ বৃত্ত ছেদকও তথা ঙজচ বৃত্ত ছেদকের সম্বন্ধে উপপন্ন হইল (৫।৫সংজ্ঞা) অতএব সমানং বৃত্ত ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

খ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

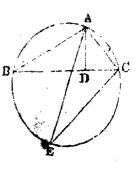
ত্রিভুজের এক কোণ যদি কোন সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি ভূমিকেও ছিন্ন করে তবে ত্রিভুজের দুই বাহুর আয়ত ভূমিখণ্ডের আয়ত এবং কোণ দ্বিখণ্ডকারক সরল রেখার সমচতুর্ভুজের যোগ সমান হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খকগ কোণ কঘ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত কল্পনা কর তাহাতে খক.কগ আয়ত খঘ. ঘগ আয়ত এবং কঘ রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে। কখগ ত্রিভুজের উপর কখগ বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া (৪।৫) কঘ রেখাকে পরিধিস্থ ঙ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং ঙগ

BAD is equal to the angle CAE, and the angle ABD to the angle (21. 3.) AEC, for they are in the same segment; the triangles ABD, AEC are equiangular to one another: Therefore BA : AD :: EA : AC (4. 6.) and consequently BA.AC=AD.AE (16. 6.) =ED.DA + DA². (3. 2.) But ED.DA = BD.DC (35. 3.), therefore BA.AC = BD.DC + DA². Wherefore if an angle, &c. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

If from any angle of a triangle a straight line be drawn perpendicular to the base; the rectangle contained by the sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the perpendicular, and the diameter of the circle described about the triangle.

Let ABC be a triangle, and AD the perpendicular from the angle A to the base BC; the rectangle BA.AC is equal to the rectangle contained by AD and the diameter of the circle described about the triangle.

Describe (5. 4.) the circle ACB about the triangle, and draw its diameter AE, and join EC: Because the right angle BDA is equal (31. 3.) to the angle ECA in a semicircle, and the angle ABD to the angle AEC, in the same segment (21. 3.) the triangles ABD, AEC, are equiangular: Therefore, (4. 6.) as BA to AD, so is EA to AC: and consequently the rectangle BA.AC is equal (16. 6) to

ন সংযুক্ত কর। খকঘ কোণ গকঙ কোণের সমান এবং কখগ কোণ কঙগ কোণের সমান (৩। ২১। কেননা তাহারা এক বৃত্তখণ্ডস্থ আছে সুতরাং কখঘ এবং কঙগ দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণ অতএব খক : কঘ :: কঙ : কগ (৬। ৪) সুতরাং খক.কগ = কঘ.কঙ (৬। ১৬) = ঙঘ.ঘক + কঘ² (২। ৩) পরন্তু ঙঘ.ঘক = খঘ.ঘগ (৩। ৩৫) এতৎকারণ খক.কগ = খঘ.ঘগ + কঘ²। অতএব ত্রিভুজের এক কোণ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

গ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন কোণ হইতে ভূমির উপর লম্বপাত করিলে ত্রিভুজের দুই বাহুর আয়ত উক্ত লম্বরেখা এবং ত্রিভুজের উপরি নিষ্কাশিত বৃত্তব্যাসের আয়ত তুল্য হইবে।

কখগ ত্রিভুজের ক কোণ হইতে খগ ভূমির উপর কঘ লম্বপাত কল্পনা কর তাহাতে খক.কগ আয়ত কঘ লম্বরেখার এবং ত্রিভুজোপরি নিষ্কাশিত বৃত্ত ব্যাসের আয়ত তুল্য হইবে।

ত্রিভুজোপরি কগখ বৃত্ত নিষ্কাশিত করিয়া (৪।৫) তাহার কঙ ব্যাস নির্দ্দেশ কর এবং ঙগ সংযুক্ত কর। কঘখ সমকোণ এতৎকারণ তাহা অর্দ্ধ বৃত্তস্থ ঙগক কোণের সমান (৩।৩১) এবং কখঘ ও কঙগ কোণ এক বৃত্ত

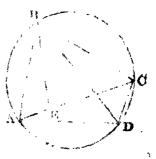
খণ্ডস্থ প্রযুক্ত পরস্পর সমান (৩।২১) সুতরাং কখঘ এবং কঙগ ত্রিভুজ পরস্পর সমানকোণি তন্নিমিত্ত খক যথা কঘ সম্বন্ধে ঙক তথা কগ সম্বন্ধে হইবে (৬।৪) সুতরাং খক

the rectangle EA.AD. If, therefore, from any angle, &c. Q. E. D.

PROP. D. THEOR.

The rectangle contained by the diagonals of a quadrilateral inscribed in a circle, is equal to both the rectangles contained by its opposite sides.

Let ABCD be any quadrilateral inscribed in a circle, and let AC, BD be drawn; the rectangle AC.BD is equal to the two rectangles AB.CD, and AD.BC.

Make the angle ABE equal to the angle DBC; add to each of these the common angle EBD, then the angle ABD is equal to the angle EBC: And the angle BDA is equal to (21. 3.) the angle BCE, because they are in the same segment; therefore the triangle ABD is equiangular to the triangle BCE. Wherefore (4. 6.), BC : EC :: BD : DA, and consequently (16. 6.) BC.DA = BD.CE. Again, because the angle ABE is equal to the angle DBC, and the angle (21. 3.) BAE to the angle BDC,

the triangle ABE is equiangular to the triangle BCD; therefore BA : AE : : BD : DC, and BA.DC = BD.AE (16. 6.): But it was shewn that BC.DA = BD.CE; wherefore BC.DA + BA.DC = BD.CE + BD.AE = BD.AC (1. 2.). That is, the rectangle contained by BD and AC is equal to the rectangles contained by AB and CD, and AD and BC. Therefore the rectangle, &c. Q. E. D.

কগ আয়ত ঙক.কঘ আয়ত তুল্য উপপন্ন হইল। অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

ঘ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজ ক্ষেত্রস্থ দুই কর্ণের আয়ত ঐ ক্ষেত্রের পরস্পর সম্মুখস্থ রেখাংশের দুই আয়তের তুল্য।

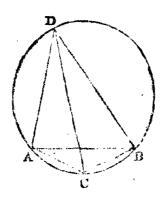
কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত কল্পনা কর এবং কগ খঘ এই দুই কর্ণ নিষ্কাশিত কর তাহাতে খঘ.কগ আয়ত কখ.গঘ এবং কঘ.খগ দুই আয়তের তুল্য হইবে।

কখঙ কোণ ঘখগ কোণের সমান করিয়া নিষ্কাশিত কর এবং তাহাদের প্রত্যেকে ঙখঘ কোণ যোগ কর তাহাতে কখঘ কোণ ঙখগ কোণের সমান হইবে। অপর খঘক কোণ খগক কোণের সমান কেননা তাহারা এক বৃত্ত খণ্ডেতে আছে (৩।২১) অতএব কখঘ এবং ঙখগ দুই ত্রিভুজ সমকোণি উপপন্ন হইল সুতরাং খগ : গঙ :: খঘ : ঘক (৬।৪) এবং খগ.ঘক = গঙ.খঘ (৬।১৬)। আর কখঙ কোণ ঘখগ সমান এবং খকঙ কোণ খঘগ সমান (৩।২১) তন্নিমিত্ত কখঙ ত্রিভুজ খগঘ ত্রিভুজের সমান কোণি

অতএব খক : কঙ :: খঘ : ঘগ সুতরাং খক.ঘগ = খঘ.কঙ (৬।১৬) পরন্তু পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে খগ.ঘক = খঘ.গঙ সুতরাং খক.ঘগ + খগ.ঘক = খঘ.কঙ + খঘ.গঙ = খঘ.কগ (২।১) অর্থাৎ খঘ এবং কগ দুই কর্ণের আয়ত খগ এবং কঘ তথা কখ এবং গঘ সম্মুখস্থ ভুজাংশের দুই আয়ত তুল্য। অতএব বৃত্তের অন্তর্গত ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. E. THEOR.

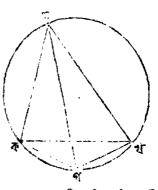
If an arch of a circle be bisected, and from the extremities of the arch, and from the point of bisection straight lines be drawn to any point in the circumference; the sum of the two lines drawn from the extremities of the arch will have to the line drawn from the point of bisection, the same ratio which the straight line subtending the arch has to the straight line subtending half the arch.

Let ABD be a circle, of which AB is an arch bisected in C, and from A, C, and B to D, any point whatever in the circumference, let AD, CD, BD be drawn; the sum of the two lines AD and BD has to DC the same ratio that BA has to AC.

For since ACBD is a quadrilateral inscribed in a circle, of which the diagonals are AB and CD, AD.CB+DB.AC (D. 6.)=AB.CD: but AD.CB+DB.AC=AD.AC+DB.AC, because CB=AC. Therefore AD.AC+DB.AC, that is (1. 2.), (AD+DB) AC=AB.CD. And because the sides of equal rectangles are reciprocally proportional (14. 6.) AD+DB : DC : : AB : AC. Wherefore, &c. Q. E. D.

ঙ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

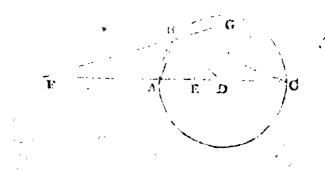
বৃত্তের কোন চাপ দ্বিখণ্ডিত হইলে যদি চাপের দুই প্রান্ত এবং দ্বিখণ্ড চিহ্ন হইতে পরিধির কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একং সরল রেখা নিষ্কাশিত হয় তবে প্রান্ত হইতে নিষ্কাশিত দুই রেখা একত্র যোগে দ্বিখণ্ড চিহ্ন হইতে নিষ্কাশিত রেখার সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ ধারণ করিবে তাহা চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখার চাপার্দ্ধ সম্মুখস্থ সরল রেখা সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণের তুল্য হইবে।

কখঘ বৃত্ত কল্পনা কর তন্মধ্যে কখ চাপ গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে এবং ক, গ, খ তিন বিন্দু হইতে পরিধির ঘ বিন্দু পর্য্যন্ত একং সরল রেখা অর্থাৎ কঘ গঘ খঘ নিষ্কাশিত হইয়াছে কঘ খঘ একত্র যোগে গঘ সম্বন্ধে যে নিষ্পত্তি পরিমাণ ধারণ করে তাহা কখ রেখার কগ সম্বন্ধীয় নিষ্পত্তি পরিমাণ তুল্য।

কগখঘ বৃত্তান্তর্গত চতুর্ভুজ ক্ষেত্র হওয়াতে এবং কখ গঘ তাহার কর্ণ হওয়াতে কঘ.খগ + খঘ.কগ = কখ.গঘ (৬।ঘ প্র) পরন্তু কঘ.খগ + খঘ.কগ = কঘ.কগ + খঘ. কগ কেননা কগ = খগ অতএব কঘ.কগ + খঘ. কগ অর্থাৎ (কঘ + খঘ) কগ = কখ.গঘ অপর সমানং আয়তের বাহু উভয়তঃ অনুপাতীয় হয় একারণ (৬।১৪) কঘ + খঘ : গঘ :: কখ : কগ অতএব বৃত্তের কোন চাপ ইত্যাদি ইহাই এন্তমে উপপাদ্য।

PROP. F. THEOR

If two points be taken in a straight line passing through the centre of a circle, such that the rectangle contained by the segments intercepted between them and the centre of the circle be equal to the square of the radius; and if from these points two straight lines be drawn to any point whatsoever in the circumference of the circle, the ratio of these lines will be the same with the ratio of the segments intercepted between the two first mentioned points and the circumference of the circle.

Let ABC be a circle, of which the centre is D, and CAF a straight line passing through the centre D. In CAF take two points E, F, such that the rectangle FD.DE equal to the square of AD. Since FD.DF = AD, ED : AD : : AD : DF (17. 6.) and therefore if ED is less than AD, AD is less than DF (14. 5.); therefore if one of the points as E is within the circle the other F will be out of the circle.

Let B be any point in the circumference of the circle, and draw straight lines EB, FB. FB : BE : : FA : AE.

Join BD and BA, and because the rectangle FD.DE

is equal to the square of AD, that is, of BD, FD . DB . : DB : DE (17. 6.)

The two triangles FDB, BDE have therefore the sides proportional that are about the common angle D; hence, they are equiangular (6. 6.), the angle DBE being equal to the angle DFB. Again, since DB is equal to DA, the angle DBA is equal to DAB (5. 1.); but DBA is the sum of DBE and EBA, and DAB is the sum of AFB and FBA (32. 1.): therefore the sum of DBE and EBA is equal to the sum of AFB and FBA: from these equals take away the equal angles DBE and AFB, and the remaining angles EBA and FBA will be equal. Thus, it appears, that, in the triangle FBE, the line BA bisects the angle FBE; therefore FB : BE : : FA : AE (3. 6.). Therefore, &c. Q. E. D.

Cor. The ratio of the straight lines FB, BE, is also the same with the ratio of FC, CE, C being the point in which FE produced meets the circle: For produce FB to G, and join BC.

Because the angles FBE, EBG make together two right angles (13. 1.), and therefore are equal to twice the sum of ABE and EBC, which make one right angle; and it has been shewn, that FBE is double ABE, therefore EBG is double EBC; hence it appears that the outward angle EBG is bisected by BC; therefore FB : BE : : FC : CE (A. 6.).

PROP. G. THEOR.

If from the extremity of the diameter of a circle a straight line be drawn in the circle, and if either within the circle, or produced without it, it meet a line perpen-

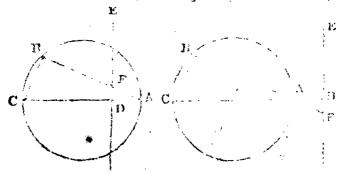
খঙ (৬।১৭) অতএব চঘথ এবং খঘঙ দুই ত্রিভুজের সামান্য ঘ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে সুতরাং তাহারা সমান কোণি সপ্রমাণ হইল (৬।৬) এবং ঘখঙ কোণ খচঘ কোণের সমান অপর খঘ এবং কঘ সমান হওয়াতে ঘকখ কোণ ঘখক কোণের সমান (১।৫) কিন্তু ঘখক কোণ ঘখঙ এবং ঙখক কোণের যোগ তুল্য এবং ঘকখ কোণ কচখ এবং কখচ কোণের যোগতুল্য (১।৩২) অতএব ঘখঙ এবং ঙখক কোণের যোগ কচখ এবং কখচ কোণের যোগ তুল্য হইল সুতরাং ঘখঙ এবং কচখ সমান২ কোণ উভয়তঃ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ঙখক কোণ কখচ কোণের তুল্য হইবে অতএব এমত উপপন্ন হইল যে খচঙ ত্রিভুজে চখঙ কোণ কখ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে এবং চখ : খঙ :: চক : কঙ (৬।৩)। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য"।

অনুমান। চঙ রেখা পরিধিস্থ গ বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলে চখ খঙ সরল রেখার পরস্পর নিষ্পত্তি চগ গঙ রেখার নিষ্পত্তি তুল্য হইবে। চখ ছ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া খগ সংযুক্ত কর। চখঙ এবং ঙখছ একত্র যোগে দুই সমকোণ তুল্য (১।১৩) সুতরাং তাহারা কখঙ এবং ঙখগ কোণের দ্বিগুণ কেননা এই দুই কোণ একত্র যোগে এক সমকোণ তুল্য। অপর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে চখঙ কোণ কখঙ কোণের দ্বিগুণ অতএব ঙখছ কোণ ঙখগ কোণের দ্বিগুণ তন্নিমিত্ত চখঙ ত্রিভুজের বহিস্থ ঙখছ কোণ খগ দ্বারা দ্বিখণ্ডিত উপপন্ন হইতেছে অতএব চখ : খঙ :: চগ : গঙ (৬।ক)।

ছ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

বৃত্ত ব্যাসের অগ্র হইতে বৃত্ত মধ্যে যদি কোন সরল রেখা নিষ্কাসিত হয় এবং যদি ঐ সরল রেখা মধ্যেই হউক অথবা বর্দ্ধিত হইয়া বাহিরেই হউক উক্ত ব্যাসের কোন লম্ব রেখায় সম্পতিত হয় তবে বৃত্ত মধ্যস্থ ঐ রেখা এবং ব্যাসাগ্র ও লম্বের

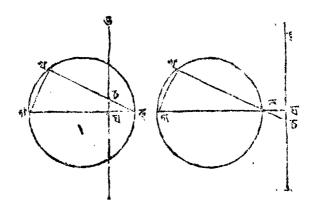
dicular to the same diameter; the rectangle contained by the straight line drawn in the circle, and the segment of it, intercepted between the extremity of the diameter and the perpendicular, is equal to the rectangle contained by the diameter, and the segment of it cut off by the perpendicular.

Let ABC be a circle, of which AC is the diameter, let DE be perpendicular to the diameter AC, and let AB meet DE in F; the rectangle BA.AF is equal to the rectangle CA.AD. Join BC, and because ABC is an angle in a semicircle, it is a right angle (31. 3.) Now,

the angle ADF is also a right angle (Hyp.); and the angle BAC is either the same with DAF, or vertical to it; therefore the triangles ABC, ADF, are equiangular, and BA : AC :: AD : AF (4. 6.); therefore also the rectangle BA.AF contained by the extremes is equal to the rectangle AC.AD contained by the means. (16. 6.) If therefore, &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

The perpendiculars drawn from the three angles of any triangle to the opposite sides intersect one another in the same point.

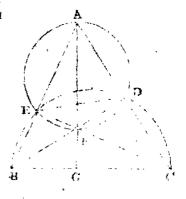
মধ্যবর্ত্তি তৎখণ্ডে উৎপন্ন আয়ত ব্যাস এবং লম্ব দ্বারা ছিন্ন তৎখণ্ডে উৎপন্ন আয়তের তুল্য হইবে।

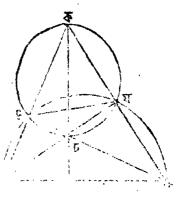
কখগ বৃত্তের কগ ব্যাস কল্পনা করিয়া তাহার উপর ঘঙ লম্ব পাত কর সেই লম্বস্থ চ বিন্দুতে কখ রেখার সম্পাত হউক খক.কচ আয়ত গক.কঘ আয়ত তুল্য হইবে। খগ সংযুক্ত কর

কখগ কোণ অর্দ্ধ বৃত্তস্থ প্রযুক্ত সমকোণ (৩।৩১) এবং কল্পনানুসারে কঘচ কোণও সম কোণ অপর খকগ এবং ঘকচ একই কোণ অথবা পরস্পরের সম্মুখস্থ কোণ একারণ কখগ এবং ঘকচ ত্রিভুজ সমান কোণি সুতরাং খক : কগ :: কঘ : কচ (৬।৪) অতএব দুই অন্ত্য রেখার খক.কচ আয়ত মধ্য রেখার কগ.কঘ আয়ত তুল্য হইল (৬।১৬)। সুতরাং বৃত্ত ব্যাসের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

জ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ হইতে সম্মুখস্থ বাহুর উপর লম্বপাত করিলে এক বিন্দুতেই সে সকল লম্বের পরস্পর সম্পাত হইবে।

Let ABC be a triangle, and BD, and CE two perpendiculars intersecting one another in F: let AF be joined, and produced if necessary, let it meet BC in G; AG is perpendicular to BC.

Join DE, and because AEF is a right angle, a circle described about the triangle AEF will have AF for a diameter (31. 1.); Also, because ADF is a right angle, a circle described about the triangle ADF will have AF for a diameter; therefore the points A, E, F, D are in the circumference of the same circle. And because the angles BEC, BDC are right angles, it may be shewn, in the same manner, that the points B, E, D, C are in the circumference of the same circle, viz. that which has BC for its diameter: Let the circle AEFD and the semicircle BEDC be described (31. 3.). Then, the angles FED, FAD, or CED, GAC, being in the same segment, will be equal (21. 3.): And in like manner it appears, that the angle CBD is equal to CED (21. 3.) therefore the angle CBD is equal to GAC. The two triangles CBD, CAG have therefore the angle CBD equal to CAG, and the angle GCD common, wherefore the remaining angles CEB, CDA are equal (32. 1.); now CDB is a right angle; therefore CGA is also a right angle, and AG is perpendicular to BC. Therefore, &c. Q. D. E.

কখগ ত্রিভুজ মধ্যে খঘ গঙ দুই লম্বের পরস্পর সম্পাত চ চিহ্নে কল্পনা করিয়া চক সংযুক্ত কর এবং প্রয়োজন হইলে তাহা বৃদ্ধি কর পরে ঐ চক সরল রেখা ছ বিন্দুতে খগ রেখায় সংলগ্ন হউক তাহাতে কছ খগ রেখার লম্ব উপপন্ন হইবে।

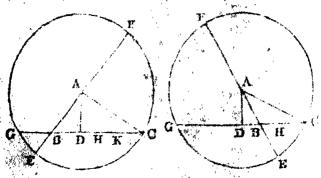
ঘঙ সংযুক্ত কর। কঙচ সমকোণ একারণ কঙচ ত্রিভুজোপরি বৃত্ত নিষ্কাসিত করিলে কচ সে বৃত্তের ব্যাস হইবে (৩।৩১) তথা কঘচ সমকোণ তন্নিমিত্ত কঘচ ত্রিভুজোপরি বৃত্ত নিষ্কাসিত করিলে কচ তাহারও ব্যাস হইবে অতএব কঙ চ ঘ এই চারি

বিন্দু এক বৃত্তের পরিধিতে আছে। অপর খঙগ এবং গঘখ [illegible] কোণ সমকোণ একারণ ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে খ ঙ ঘ গ বিন্দুও এক বৃত্তের পরিধিতে আছে এবং খগ সেই বৃত্তের ব্যাস অতএব কঙচঘ বৃত্ত এবং খঙঘগ অর্দ্ধ বৃত্ত নিষ্কাসিত কর। অধিকন্তু চঙঘ এবং চকঘ অর্থাৎ গঙঘ এবং ছকগ এক বৃত্তখণ্ডস্থ হওয়াতে পরস্পর সমান (৩।২১) তদ্রূপ গখঘ কোণ গঙঘ কোণের সমান উপপন্ন হইবে অতএব গখঘ কোণ ছকগ কোণের সমান সুতরাং খগঘ গকছ দুই ত্রিভুজে গখঘ কোণ ছকগ সমান এবং ছগঘ উভয় পক্ষে সামান্য একারণ অবশিষ্ট গঘখ এবং কছগ কোণ পরস্পর সমান (১।৩২) পরন্তু গঘখ সমকোণ তন্নিমিত্ত কছগ কোণও সমকোণ সুতরাং কছ খগ সরল রেখার লম্ব সপ্রমাণ হইল। অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি।

Cor. The triangle ADE is similar to the triangle ABC. For the two triangles BAD, CAE having the angles at D and E right angles, and the angle at A common, are equiangular, and therefore BA : AD : : CA : AE, and alternately BA : CA : : AD : AE : therefore the two triangles BAC, DAE, have an angle at A common, and the sides about that angle proportionals, therefore they are equiangular (6. 6.) and similar.

Hence the rectangles BA.AE, CA.AD are equal.

PROP. K. THEOR.

If from any angle of a triangle a perpendicular be drawn to the opposite side or base; the rectangle contained by the sum and difference of the other two sides is equal to the rectangle contained by the sum and difference of the segments into which the base is divided by the perpendicular.

Let ABC be a triangle, and AD a perpendicular drawn from the angle A on the base BC, so that BD, DC are the segments of the base; (AC + AB) (AC—AB) = (CD + DB) (CD—DB).

From A as a centre with the radius AC, the greater of the two sides, describe the circle CFG; produce

১৩। নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যেই হউক কিম্বা বাহিরেই হউক দুই পূর্ণজ্যার পরস্পর সম্পাত হইলে তাহারদের অন্তর স্থিত কোণ তাহারদের মধ্যবর্ত্তি দুই চাপের যোগান্তর তুল্য [অর্থাৎ বৃত্তের মধ্যে জ্যাসম্পাত হইলে উক্ত দুই চাপের যোগ তুল্য এবং বৃত্তের বাহিরে সম্পাত হইলে অন্তর তুল্য] কোন চাপোপরি কেন্দ্রস্থ কোণের অর্দ্ধেক হইবে।

১৪। কোন বৃত্তের ব্যাস বর্দ্ধিত হইলে তাহাতে এমত এক বিন্দুর নির্দ্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে বৃত্ত স্পর্শক রেখা নিষ্কাসিত করিলে ব্যাসের সমান হইবে।

১৫। কোন বৃত্ত পরিধিতে এমত এক বিন্দুর নির্দ্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে পরিধিস্থ অন্য দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু পর্য্যন্ত রেখা নিষ্কাসিত করিলে যে দুই রেখার পরস্পর সম্বন্ধে নির্দ্দিষ্ট পরিমাণে নিষ্পত্তি হইবে।

১৬। কোন বৃত্তের ব্যাসে কেন্দ্র ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু গৃহীত হইলে ঐ বিন্দু দিয়া যত চাপ টানা যাইতে পারে তাহার মধ্যে ব্যাসের অগ্র সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র হইবে।

১৭। দুই সমকেন্দ্র বৃত্তকে ছেদ করিয়া এক সরল রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যেন বৃহত্তর বৃত্ত পরিধির মধ্যস্থিত অংশ ক্ষুদ্রতর পরিধি মধ্যস্থিত অংশের দ্বিগুণ হয় কিন্তু বৃহত্তর বৃত্তের কর্ণটি ক্ষুদ্রতরের কর্ণটির দ্বিগুণ অপেক্ষা অধিক হইবে না।

১৮। বৃত্ত পরিধিস্থ কোন দুই বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক রেখাস্থ কোন এক বিন্দু পর্য্যন্ত যদি দুই সরল রেখা টানা যায় তবে স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত রেখা নিষ্কাসিত করিলে তদ্দ্বারা সর্ব্বাপেক্ষা বৃহৎ কোণ উৎপন্ন হইবে।

১৯। বৃত্তের মধ্যে যদি এক পূর্ণজ্যা অন্য কোন পূর্ণজ্যাকে দ্বিখণ্ড করে এবং প্রত্যেক জ্যার দুই অগ্র হইতে স্পর্শক রেখা যদি নিষ্কাসিত হইয়া পরস্পর সম্পাতিত হয় তবে যে রেখা

duced to meet; the line joining their points of intersection will be parallel to the bisected chord.

20. If two circles cut each other; the greatest line that can be drawn through the point of intersection to the two circumferences is that which is parallel to the line joining their centres.

21 If the tangents drawn to every two of three unequal circles be produced till they meet: the points of intersection will be in a straight line.

Section III.

22. Any side of a triangle is greater than the difference between the other two sides.

23. In any right-angled triangle, the straight line joining the right angle and the bisection of the hypothenuse is equal to half the hypothenuse.

24. If from any point within an equilateral triangle perpendiculars be drawn to the sides; they are together equal to a perpendicular drawn from any of the angles to the opposite side.

25. If the points of bisection of the sides of a given triangle be joined; the triangle so formed will be one fourth of the given triangle.

26. The difference of the angles at the base of any triangle is double the angle contained by a line drawn from the vertex perpendicular to the base, and another bisecting the angle at the vertex.

দ্বারা সম্পাত চিহ্ন সংযুক্ত হয় সেই রেখা দ্বিখণ্ডিত জ্যার সমান্তরাল হইবে।

২০। দুই বৃত্ত যদি পরস্পরকে ছিন্ন করে তবে ছেদ চিহ্ন দিয়া দুই পরিধিতে যেং রেখা নিষ্কাশিত হইতে পারে তন্মধ্যে তাহারদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা সর্ব্বাপেক্ষা বৃহৎ হইবে।

২১। তিন বিষম বৃত্তের মধ্যে কোন দুই বৃত্তের সামান্য স্পর্শক রেখা নিষ্কাশিত করিয়া বর্দ্ধিত করিলে তাহারদের সম্পাত চিহ্ন এক রেখাস্থ হইবে।

৩ পরিচ্ছেদ।

২২। ত্রিভুজের কোন্ বাহু অন্য দুই বাহুর অন্তর হইতে অধিক।

২৩। সমকোণি ত্রিভুজে সমকোণ হইতে কর্ণের মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত রেখা নিষ্কাসিত করিলে সে রেখা কর্ণের অর্দ্ধাংশ তুল্য হইবে।

২৪। সম বাহু ত্রিভুজের অন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহু সকলের উপর যদি লম্বপাত করা যায় তবে কোন কোণ হইতে সম্মুখস্থ ভুজোপরি লম্বপাত করিলে সেই লম্ব উক্ত লম্ব সকলের যোগ তুল্য হইবে।

২৫। নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহু সকল দ্বিখণ্ডিত হইলে দ্বিখণ্ডন চিহ্ন সকল যদি সংযুক্ত হয় তবে তদুৎপন্ন ত্রিভুজ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের চতুর্থাংশ হইবে।

২৬। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের অন্তর শৃঙ্গ হইতে পতিত ভূমির লম্ব এবং শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী রেখার মধ্যবর্ত্তি কোণের দ্বিগুণ হইবে।

২৭। এক ভূমির উপর যেং সমলম্ব ত্রিভুজ হইতে পারে তাহার মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুর যোগ সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূন।

27. The sum of the sides of an isosceles triangle is less than the sum of the sides of any other triangle on the same base and between the same parallels.

28. Of all triangles having the same vertical angle, and whose bases pass through a given point, the least is that whose base is bisected in the given point.

29. To bisect a given triangle by a line drawn from a given point in one of its sides.

30. To determine a point within a given triangle, from which lines drawn to the several angles, will divide the triangle into three equal parts.

31. To trisect a given triangle from a given point within it.

32. From a given point in the side of a triangle, to draw lines which will divide the triangle into parts which shall have a given ratio.

Section IV.

33. To bisect a parallelogram by a line drawn from a point in one of its sides.

34. To bisect a trapezium by a line drawn from one of its angles.

35. To bisect a trapezium by a line drawn from a given point in one of its sides.

36. The area of any two parallelograms described on the two sides of a triangle is equal to that of a parallelogram on the base, whose side is equal and parallel

২৮। যেং ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ সামান্য অথচ ভূমি এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে সংলগ্ন তাহারদের মধ্যে যে ত্রিভুজের ভূমি ঐ নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত সেই ত্রিভুজ সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র।

২৯। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন এক বাহু পর্য্যন্ত নিষ্কাসিত সরল রেখার দ্বারা এক ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩০। কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরে এমত এক বিন্দু নির্দ্দেশ করিতে হইবে যেখান হইতে সকল কোণ পর্য্যন্ত রেখা টানিলে ত্রিভুজ তিন সমান ভাগে বিভক্ত হইবে।

৩১। ত্রিভুজের অন্তরস্থ কোন কোণ হইতে ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩২। ত্রিভুজের কোন বাহুর নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতিপয় রেখা টানিতে হইবে যেন তদ্দ্বারা নির্দ্দিষ্ট পরিমাণে পরস্পর নিষ্পন্ন কতিপয় অংশে ঐ ত্রিভুজ বিভক্ত হয়।

---

৪ পরিচ্ছেদ।

৩৩। সমানান্তরাল ক্ষেত্রের বাহুস্থ কোন বিন্দু হইতে নিষ্কাসিত রেখা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৪। বিষম চতুর্ভুজের কোন কোণ হইতে নিষ্কাসিত রেখা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৫। বিষম চতুর্ভুজের কোন বাহুস্থ নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে নিষ্কাসিত রেখার দ্বারা ঐ ক্ষেত্র দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৬। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত হইলে যদি ভূমিরও উপর তদ্রূপ ক্ষেত্র নিষ্কাসিত হয় এবং ভূমির উপরিস্থ ক্ষেত্রের বাহু যদি পূর্ব্বোক্ত দুই ক্ষেত্রের

to the line drawn from the vertex of the triangle to the intersection of the two sides of the former parallelograms produced to meet.

Deduce Euclid 47. I., as a particular case of this.

37. If squares be described on the hypothenuse and sides of a right-angled triangle, and the extremities of the sides of the former and the adjacent sides of the others be joined; the sum of the squares of the lines joining them will be equal to five times the square of the hypothenuse.

Section V.

38. To determine a point in a line given in position, to which lines drawn from two given points may have the greatest difference possible.

39. To divide a straight line into two parts such, that the rectangle contained by them may be equal to the square of their difference.

40. To determine two lines such that the sum of their squares may be equal to a given square, and their rectangle equal to a given rectangle.

41. Through a given point to draw a line terminating in two lines given in position, so that the rectangle contained by the two parts may be equal to a given rectangle, but this rectangle must not be less than that contained between the segments of the perpendicular from the point on either of the lines.

বর্দ্ধিত বাহুর সম্পাত চিহ্ন পর্য্যন্তশৃঙ্গ হইতে নিষ্কাসিত রেখার সমান এবং সমানান্তরাল হয় তবে বাহুর উপরিস্থ দুই ক্ষেত্র ভূমির উপরিস্থ ক্ষেত্রের তুল্য হইবে।

ইউক্লিডের ১ অধ্যায়ের ৪৭ প্রতিজ্ঞা এস্থলে অনুমান সিদ্ধ কর।

৩৭। সম কোণি ত্রিভুজের কর্ণ এবং ভুজ কোটির উপর সম চতুর্ভুজ ক্ষেত্র নিষ্কাসিত হইলে যদি কর্ণোপরিস্থ চতুর্ভুজের ভুজাগ্র ভুজ কোটির চতুর্ভুজস্থ সন্নিহিত পার্শ্বের অগ্র সহিত সংযুক্ত হয় তবে সংযোজক রেখার সমচতুর্ভুজ একত্র যোগ কর্ণের সমচতুর্ভুজের পঞ্চ গুণ হইবে।

---

৫ পরিচ্ছেদ।

৩৮। এক নির্দ্দিষ্ট রেখায় এমত বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেখান পর্য্যন্ত দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই সরল রেখা টানিলে সেই দুই রেখার সর্ব্বাপেক্ষা অধিক অন্তর হইবে।

৩৯। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহারদের আয়ত তাহারদের অন্তরের সম চতুর্ভুজ তুল্য হয়।

৪০। এমত দুই রেখা নির্দ্দিষ্ট করিতে হইবে যে তাহারদের সম চতুর্ভুজের যোগ কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ তুল্য হয় এবং তাহারদের আয়ত কোন নির্দ্দিষ্ট আয়ত তুল্য হয়।

৪১। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুই নির্দ্দিষ্ট রেখা পর্য্যন্ত এক সরল রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যেন তাহার দুই অংশের আয়ত এক নির্দ্দিষ্ট আয়ত তুল্য হয় কিন্তু সেই নির্দ্দিষ্ট আয়ত ঐ বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট দুই রেখার কোনটির উপর পতিত লম্ব খণ্ডের আয়ত অপেক্ষা ন্যূন হইবে না।

42. From a given point to draw a line cutting two given parallel lines, so that the difference of its segments may be equal to a given line, not less than the difference of the segments of the perpendicular from the point to the two lines.

43. From two given points to draw two lines to a point in a third line, so that the difference of their squares may be equal to a given square.

44. To divide a given triangle into any number of parts, having a given ratio to each other, by lines drawn parallel to one of the sides of the triangle.

45. To divide a given triangle into any number of equal parts, by lines drawn parallel to a given line.

46. Through a given point, between two straight lines containing a given angle, to draw a line which shall cut off a triangle equal to a given rectilineal figure; not less than the triangle between the given straight lines, and a base which is bisected in the given point. See Sec. III. 28.

Section VI.

47. To describe a rectangular parallelogram which shall be equal to a given square, and have its adjacent sides together equal to a given line, not less than twice the side of the given square.

৪২। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই নির্দ্দিষ্ট সমানান্তরাল রেখায় সম্পতিত এক রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যেন তাহার খণ্ডান্তর নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান হয় সেই নির্দ্দিষ্ট রেখা ঐ বিন্দু হইতে পতিত উক্ত দুই রেখার লম্বের খণ্ডান্তর অপেক্ষা ন্যূন হইবে না।

৪৩। দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তৃতীয় রেখাস্থ কোন বিন্দু পর্য্যন্ত দুই রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে তাহারদের সমচতুর্ভুজের অন্তর যেন কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ তুল্য হয়।

৪৪। নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমানান্তরাল কতিপয় রেখা দ্বারা ত্রিভুজ ক্ষেত্রকে কতিপয় অংশে বিভক্ত করিতে হইবে সেই সকল অংশের পরস্পর নিষ্পত্তি যেন নির্দ্দিষ্ট পরিমাণানুযায়ি হয়।

৪৫। কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার সমানান্তরাল কতিপয় রেখার দ্বারা এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজকে কতিপয় সমান২ অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

৪৬। নির্দ্দিষ্ট কোণোৎপাদক দুই সরল রেখার মধ্যবর্ত্তি কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমত এক রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যে তদ্দ্বারা সরল রৈখিক নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্র তুল্য ত্রিভুজ ক্ষেত্র অবচ্ছিন্ন হয় কিন্তু ঐ ক্ষেত্র নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এমত ভূম্যুপরিস্থ অথচ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার মধ্যবর্ত্তি ত্রিভুজ অপেক্ষা ন্যূন হইবেক না। ৩ পরিচ্ছেদে ২৮ সংখ্যাক প্রশ্নে দৃষ্টি কর।

৬ পরিচ্ছেদ।

৪৭। এমত এক সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহা এক নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয় এবং যাহার দুই সংলগ্ন বাহু একত্র যোগে এক নির্দ্দিষ্ট

48. To describe a rectangular parallelogram which shall be equal to a given square, and have the difference of its adjacent sides equal to a given line.

49. To describe a triangle which shall be equal to a given equilateral and equiangular pentagon, and of the same altitude.

50. To describe an equilateral triangle equal to a given isosceles triangle.

51. To describe a parallelogram, the area and perimeter of which shall be respectively equal to the area and perimeter of a given triangle.

52. To divide a circle into any number of concentric equal annuli.

53. To inscribe a square in a given semicircle.

54. To inscribe a square in a given segment of a circle.

55. Having given the distance of the centres of two equal circles which cut each other; to inscribe a square in the space included between the two circumferences.

56. In a given circle to inscribe a rectangular parallelogram equal to a given rectilineal figure.

57. In a given equilateral and equiangular pentagon to inscribe a square.

58. To inscribe a circle in a given quadrant.

59. To describe a circle, the circumference of

রেখার তুল্য হয় কিন্তু সেই রেখা নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজের ভুজ পরিমাণের দ্বিগুণের ন্যূন হইবেক না।

৪৮। এমত এক সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহা এক নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয় এবং যাহার দুই সংলগ্ন বাহুর অন্তর এক নির্দ্দিষ্ট রেখার তুল্য হয়।

৪৯। এমত এক ত্রিভুজ নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহা তত্তুল্য উন্নত অথচ সমবাহুক এবং সমকোণি পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের সমান হয়।

৫০। এক নির্দ্দিষ্ট সমদ্বিবাহুক ত্রিভুজের সমান এক সমবাহুক ত্রিভুজ ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবে।

৫১। এমত এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্র ফল এবং পরিমিতি ক্রমশঃ এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল এবং পরিমিতি তুল্য হয়।

৫২। এক বৃত্তকে কতিপয় সমকেন্দ্র সমান২ বলয়ে বিভক্ত করিতে হইবে।

৫৩। এক নির্দ্দিষ্ট অর্দ্ধবৃত্তে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৪। এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ডে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৫। পরস্পর অবচ্ছেদক এমত দুই সমান২ বৃত্তের কেন্দ্রের দূরতা নির্দ্ধারিত করিয়া তাহারদের পরিধির মধ্যবর্ত্তি স্থলে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৬। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৭। এক নির্দ্দিষ্ট সমবাহুক এবং সমান কোণি পঞ্চভুজে সমচতুর্ভুজ অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৮। এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তপাদে বৃত্ত অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৯। এমত এক বৃত্ত নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহার পরিধি

SECTION VIII.

68. If on the chord of a quadrantal arc a semicircle be described; the area of the lune so formed will be equal to the area of the triangle formed by the chord and terminating radii of the quadrant.

69. If from the extremities of the side of a square circles be described, the radius of one being equal to the side, and of the other to the diagonal of the square; the area of the lune so formed will be equal to the area of the square.

70. If, on the sides of a triangle inscribed in a semicircle, semicircles be described; the two lunes formed thereby will together be equal to the area of the triangle.

SECTION IX.

71. Given one angle, a side adjacent to it, and the difference of the other two sides; to construct the triangle.

72. Given one angle, a side opposite to it, and the difference of the other two sides; to construct the triangle.

73. Given one angle, a side opposite to it, and the sum of the other two sides; to construct the triangle

74. In a right-angled triangle, having given the sum of the base and hypothenuse, and the sum of the base and perpendicular; to construct the triangle.

৮ পরিচ্ছেদ।

৬৮। বৃত্ত পাদ সম্বলিত চাপের পূর্ণজ্যার উপর অর্দ্ধ বৃত্ত নিষ্কাসিত হইলে তাহাতে যে অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহা ঐ পূর্ণজ্যা এবং বৃত্তপাদস্থ দুই প্রান্ত কর্কটের মধ্যবর্ত্তি ক্ষেত্র তুল্য হইবে।

৬৯। কোন সমচতুর্ভুজের ভুজাগ্র হইতে দুই বৃত্ত নিষ্কাসিত হইলে একটী যদি ভুজ পরিমাণে এবং অন্যটী কর্ণ পরিমাণে অঙ্কিত হয় তবে তাহাতে যে অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে তাহা ঐ সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের তুল্য।

৭০। অর্দ্ধ বৃত্তান্তর্গত ত্রিভুজের ভুজোপরি যদি অর্দ্ধ বৃত্ত নিষ্কাসিত হয় তবে তাহাতে যে দুই অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে তাহা একত্র যোগে ঐ ত্রিভুজ ক্ষেত্রের তুল্য হইবে।

৯ পরিচ্ছেদ।

৭১। এক কোণ এবং তৎসংলগ্ন এক বাহু এবং অন্য দুই ভুজান্তর জ্ঞাত আছে তাহাতে তৎ সম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭২ এক কোণ এবং সম্মুখস্থ বাহু এবং অন্য দুই ভুজান্তর জ্ঞাত আছে তাহাতে তৎসম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৩। এক কোণ এবং তৎসম্মুখস্থ বাহু এবং অন্য দুই ভুজের যুতি জ্ঞাত আছে তাহাতে তৎসম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৪। সমকোণি ত্রিভুজে কর্ণ এবং ভুজের যতি জ্ঞাত আছে তাহাতে তৎসম্বলিত ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

75. Given one angle of a triangle, and the sums of each of the sides containing it and the third side; to construct the triangle.

76. The area and hypothenuse of a right-angled triangle being given; to construct the triangle.

*** In the foregoing problems the distribution into *sections* is given according to Bland in order to enable the learner to make references with facility; but the problems are numbered differently here.

৭৫। কোন ত্রিভুজের এক কোণ এবং তৎসংলগ্ন প্রত্যেক বাহুর এবং তৃতীয় বাহুর সমষ্টি জ্ঞাত আছে তাহাতে ঐ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৬। সমকোণি ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল এবং কর্ণ জ্ঞাত আছে তাহাতে ঐ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

⁎ ব্লাণ্ড নামক গ্রন্থকারের মতানুসারে উপরি লিখিত প্রশ্ন সকলের পরিচ্ছেদ ভেদ করা গেল ইহার বিশেষ তাৎপর্য্য এই যে পাঠকবর্গ অনায়াসে ঐ গ্রন্থে তাহার উদ্দেশ প্রাপ্ত হইতে সক্ষম হইবেন পরন্তু এস্থলে প্রশ্ন সকলের পৃথকঃ সংখ্যা দত্ত হইল।

QUESTIONS FROM THE LILAVATI.

The following questions are appended, not because hey form a good sequel for their own merit to the preceding problems from Bland, but because, being extracted from a popular text-book in Sanscrit of practical Geometry, they have a sort of classical authority in the estimation of the Hindus. The *Lilavati* is the source whence Hindu mathematicians generally derive their geometrical knowledge; and, as the following list contains all the points treated in that work on the subject of *Plane Figure*, the learner may take some interest in answering the queries.

The ancient Brahmins never made any considerable progress in the study of Geometry. Their speculations in Algebra were of a higher order. Euclid's method of *rigidly* demonstrating every truth that is propounded was not known to the Brahmins, or at least was wholly disregarded by them. That they were acquainted with many properties of rectangles, rectangular triangles, and circles, the following questions prove beyond as doubt. The original inventors of the science must have satisfied themselves in some way of the truth of the propositions they believed and taught. But

লীলাবতীর প্রশ্ন।

[illegible] নামক গ্রন্থকার প্রণীত পূর্ব্বোক্ত প্রশ্ন সকলের উল্লে-
খানন্তর নিম্ন লিখিত প্রশ্ন যদিও এস্থলে উদ্ধৃত করিবার
উপযুক্ত নহে তথাপি ভারতবর্ষীয় জনগণ ক্ষেত্র ব্যবহার সম্ব-
ন্ধীয় প্রসিদ্ধ সংস্কৃত গ্রন্থোদ্ধৃত বলিয়া প্রাচীন বোধে ঐ
সকল প্রশ্নের মহা গৌরব করিয়া থাকেন একারণ তাহার
প্রসঙ্গ করা গেল ফলতঃ ভারতবর্ষীয় গণিত বেত্তারদের পক্ষে
প্রধানতঃ লীলাবতীই ক্ষেত্র ব্যবহার বিষয়ক বিদ্যার মূল
অধিকন্তু ঐ গ্রন্থের মধ্যে ক্ষেত্র সম্বন্ধে যেং সূত্র আছে নিম্ন
লিখিত প্রশ্ন সমুদায়ই সে সকলের বিষয় অতএব এই সকল
প্রশ্নের উত্তর লিখনে কিঞ্চিৎ আমোদ জন্মিবার সম্ভাবনা।

ভারতবর্ষীয় পূর্ব্বতন পণ্ডিতেরা ক্ষেত্রতত্ত্বে অধিক ব্যুৎপন্ন
ছিলেন না। বীজ গণিত বিদ্যাতে তাঁহারদের উত্তম ব্যুৎপত্তি
ছিল। ইউক্লিড নামা গ্রীক গণিত বেত্তা যেং প্রতিজ্ঞার
উদ্দেশ করিতেন সকলি দৃঢ়তর যুক্তি দ্বারা উপপন্ন করিতেন
কিন্তু বোধ হয় ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরা এই সুধারা
অবগত ছিলেন না অথবা অগ্রাহ্য করিয়াছিলেন। তাঁহারা
বৃত্ত আয়ত জাত্য ত্রিভুজ প্রভৃতি ক্ষেত্র গণনায় যে পার-
দর্শি ছিলেন নিম্ন লিখিত প্রশ্ন পাঠে তাহা নিঃসন্দেহ
রূপে বোধগম্য হইবে অপর ক্ষেত্র বিদ্যার আদ্য সৃষ্টি
কারকেরা যেং প্রতিজ্ঞা সত্য বলিয়া গ্রহণ পূর্ব্বক শিষ্য-

it does not appear that, when communicating them to their disciples, they revealed the grounds of their belief, in any way similar to Euclid's. The doctrines were inculcated, and received as established truths, on the authority of the tutors; and, as they stood the test of experience, no other demonstrations were sought. It may be doubted whether any Brahmin, unenlightened by foreign instruction, and unacquainted with the Sanscrit translation of Euclid, executed in the days of Jaya Singha, not more than 200 years ago, can *mathematically* demonstrate the truths, involved in the problems which he is able mechanically to solve.

The questions numbered 31 and 33 cannot be geometrically solved. The problem of inscribing a heptagon or a nonagon in a circle is identical with that which was celebrated among Greek geometricians as the problem of the trisection of the angle.

If treated algebraically, it leads to a cubic equation with three real roots, the arithmetical value of which can be found only approximately.

The author of the Lilavati has given no account of the way in which he got the numbers stated by him; if they had been obtained by solution of the above-mentioned equation, they would probably have been more accurate than they are. He only lays down an arbitrary rule

গণকে উপদেশ করিতেন তাহার প্রমাণ অবশ্য কোন প্রকারে আপনারদের হৃদয়ঙ্গম করিয়া থাকিবেন কিন্তু তাঁহারা শিষ্য গণকে উপদেশ করণ কালে ইউক্লিডের ন্যায় দৃঢ়তর যুক্তি দর্শাইয়া সে প্রমাণ যে ব্যক্ত করিয়াছিলেন এমত বোধ হয় না ফলতঃ গুরুর কথা প্রমাণ তাঁহারদের প্রণীত সূত্র সকলের শিক্ষা হইত এবং শিষ্যেরাও তাহা আপ্ত বাক্য বলিয়া স্বীকার করিতেন আর পরীক্ষা কালীন তাহাতে কোন ব্যভিচার দৃষ্ট হইত না সুতরাং অন্য কোন উপপত্তির আকাঙ্ক্ষাও ছিল না।* যেং পণ্ডিতেরা বিদেশীয় বিদ্যায় উপদেশ প্রাপ্ত হয়েন নাই অথবা রাজা জয় সিংহের কালে অর্থাৎ অতীত দুই শত বৎসরের মধ্যে বিরচিত রেখা গণিত নামক ইউক্লিডের সংস্কৃত অনুবাদেও দৃষ্টি করেন নাই তাঁহারদের মধ্যে বোধ হয় এক জনও এমত পারদর্শী নহেন যে গুরূপদিষ্ট সূত্রানুসারে যেং প্রশ্নের উত্তর লিখিতে সক্ষম গণিত শাস্ত্রের ধারায় তাহা উপপন্ন করিতে পারেন।

৩১ এবং ৩৩ সংখ্যক প্রশ্নে যে বিষয় সম্পন্ন করিবার অনুরোধ আছে তাহা ক্ষেত্র দ্বারা সিদ্ধ করা অসাধ্য। সপ্তভুজ অথবা নবভুজ ক্ষেত্র বৃত্তান্তর্গত করণের প্রশ্ন গ্রীক জাতীয় ক্ষেত্র বেত্তারা যাহাকে কোণ ত্রিখণ্ড করণের প্রশ্ন কহিতেন তাহা হইতে ভিন্ন নহে।

বীজ গণিতের ধারাতে সিদ্ধান্ত করিলে ঐ প্রশ্নে এক ঘন সমীকরণ উপস্থিত হয় তাহার সম্ভাব্য মূল ত্রিবিধ কিন্তু অঙ্ক দ্বারা সেই মূল যথার্থরূপে সিদ্ধ হয় না কেবল অতি সূক্ষ্মরূপে শুদ্ধ সন্নিহিত হইতে পারে।

লীলাবতীর গ্রন্থকার উক্ত ক্ষেত্রের ভুজ পরিমাণার্থ যেং সংখ্যার উদ্দেশ করিয়াছেন তাহা কিরূপে লব্ধ হয় সে ধারার বিবরণ লেখেন নাই। উক্ত সমীকরণের সিদ্ধান্ত দ্বারা তাহা প্রাপ্ত হইলে বোধ হয় আরও সূক্ষ্মরূপে যথার্থ পরিমাণানুযায়ি হই-

that the side of the heptagon is $\frac{52055}{120000}$ of the diameter and that of the nonagon $\frac{41031}{120000}$ of the same. Neither of these is very far from the truth. The accurate value of the side of the heptagon lies between $\frac{82}{189}$ and $\frac{105}{242}$. The side of the nonagon lies between $\frac{13}{38}$ and $\frac{105}{307}$.

Among the commentators on the Lilavati, Rama krishna, Gangadhara, Ranganatha, have not attempted any demonstration of the problems in question, and have contented themselves with merely repeating the figures contained in the text. Ganesa confesses that the proof of the sides of the regular pentagon, heptagon, and nonagon cannot be shown in a manner similar to that of the triangle, square, and octagon. That is untrue of the pentagon: its side can be geometrically found, as shewn in this treatise B IV Prop. 11; and the admission of Ganesa serves only to prove that he was unacquainted with the Sanscrit translation of Euclid, which contains a solution of this problem. Ganesa cannot mean only that the side of the pentagon is incommensurable with the diameter: for, that is equally true of the triangle, square, and octagon, inscribed in a circle. Suryadasa bolder than Ganesa and the other commentators, with no other result than shewing more conspicuously his ignorance of the real nature of the problem. "For the heptagon" says he "describe a circle as before, and within it an equilateral heptagon; then a line being

হইতে পারিত। তিনি কেবল স্বেচ্ছানুসারে এক সূত্র রচনা করিয়া কহেন যে সপ্তভুজ ক্ষেত্রের বাহুপরিমাণ ব্যাসের $\frac{৫২০৫৫}{১২০০০০}$ গুণ এবং নবভুজের বাহু পরিমাণ $\frac{৪১০৩১}{১২০০০০}$ গুণ। এ পরিমাণ নিতান্ত অসত্য নহে কেননা সপ্তভুজের যথার্থ ভুজ পরিমাণ $\frac{৮২}{১৮৯}$ এবং $\frac{১০৫}{২৪২}$ মধ্যে নিশ্চিত, এবং নবভুজের ভুজ পরিমাণ $\frac{১৩}{৩৮}$ এবং $\frac{১০৫}{৩০৭}$ মধ্যে নির্ণীত হইয়াছে।

লীলাবতীর টীকাকারের মধ্যে রামকৃষ্ণ গঙ্গাধর রঙ্গনাথ উক্ত প্রশ্নের উপপত্তি করিতে চেষ্টাও করেন নাই তাঁহারা কেবল গ্রন্থকারের কল্পিত অঙ্কের পুনরুক্তি করিয়াছেন, গণেশ স্পষ্টই স্বীকার করিয়াছেন যে সমবাহু ত্রিভুজ চতুর্ভুজ এবং অষ্ট ভুজের ন্যায় পঞ্চভুজ সপ্তভুজ এবং নবভুজের ভুজ পরিমাণ স্পষ্টরূপে উপপন্ন হয় না। পঞ্চ ভুজের বিষয়ে এপ্রকার স্বীকার করা কর্ত্তব্য নহে কেননা পঞ্চভুজের বাহু ক্ষেত্রদ্বারা নির্ণীত করা যায় যথা এই পুস্তকের ২ অধ্যায়ের ১১ প্রতিজ্ঞাতে উপপন্ন হইয়াছে সুতরাং গণেশের স্বীকৃত কথায় কেবল এই বোধ হয় যে ইউক্লিডের সংস্কৃত অনুবাদ অর্থাৎ রেখা গণিত যাহাতে ঐ প্রশ্নের সিদ্ধান্ত হইয়াছে তাহা তিনি জানিতেন না। বোধ হয় তাঁহার এই মাত্র অভিপ্রায় না হইবে যে পঞ্চ ভুজের বাহু ব্যাসের যথার্থ পরিমেয় নহে কেননা তাহা ত্রিভুজ চতুর্ভুজ এবং অষ্ট ভুজের বিষয়েও কহা যাইতে পারে। সূর্য্যদাস গণেশ প্রভৃতি অন্যান্য টীকাকারের অপেক্ষা অধিক সাহসিক হইয়া রচনা করিয়াছেন কিন্তু উপস্থিত বিষয়ে তাঁহার অনভিজ্ঞতা আরও স্পষ্টরূপে প্রকাশ পাইতেছে তিনি কহেন সপ্তভুজের প্রমাণার্থ "পূর্ব্ববৎ বক্ত নিষ্কাসিত করিয়া পরে সমবাহুক

drawn between the extremities of any two sides at pleasure and three lines from the centre of the circle to the angles indicated by those extremities, an unequal quadrilateral is formed. The greater sides, and the least diagonal thereof are equal to the semi-diameter. The value of the greater diagonal, which is assumed arbitrarily, is the chord of the arc encompassing the two sides. Its arrow being deduced in the manner before directed, is the side of a small rectangular triangle. Thus the greater diagonal, being here arbitrarily assumed to be 93804, is the chord sought; its arrow found in the manner directed is 22579; this is the side, and half the base or chord is the upright 46902; their squares are 509711241 and 21997604, the square root of the sum of which is the side of the heptagon or 52056.*

For the nonagon, he says; "A circle being described as before, inscribe a triangle in it. Thus the circle is divided into three parts. Three equal chords being drawn in each of those portions, a nonagon is thus inscribed in the circle: and three oblongs are formed within the same; of which the base is equal to the side of the (inscribed) triangle. Two perpendiculars being drawn in the oblong, it is divided into three por-

* These numbers are given from the copy of Suryadara's commentary on the Lilavati in the library of the Asiatic Society. There are two obvious errors in them, probably of the copyist; viz. 22579 should be 22551 and 21997604 should be 2199797604.

সপ্তভুজ ক্ষেত্র তদন্তর্গত কর। স্বেচ্ছানুসারে দুই ভুজাগ্র রেখা দ্বারা সংযুক্ত করিয়া কেন্দ্র হইতে ঐ ভুজাগ্র চিহ্নিত কোণ পর্য্যন্ত তিন রেখা নিষ্কাশিত হইলে তাহাতে এক বিষম চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইবে তাহার বৃহত্তর দুই বাহু এবং ক্ষুদ্রতর কর্ণ ব্যাসার্দ্ধ তুল্য। অপর স্বেচ্ছানুসারে কল্পিত বৃহত্তর কর্ণের যে পরিমাণ তাহাই দুই ভুজ ব্যাপক চাপের পূর্ণজ্যা। পরে পূর্ব্বোক্ত নিয়মানুসারে শর নির্ণয় করিলে তাহা এক মাত্র ত্রিভুজের ভুজ হইবে, যথা বৃহত্তর কর্ণ পরিমাণ স্বেচ্ছানুসারে ৯০৮০২ কল্পিত, ইহাই এস্থলে ইষ্টজ্যা, পূর্ব্বোক্ত নিয়মে তাহার শর ২২৫৭৯, ইহাই ভুজ, এবং জীবা স্বরূপ পূর্ব্বের অর্দ্ধ কোটি ৪৬৯০২, ইহাদের বর্গ ৫০৯৭১১২৪১ যোগ ২১৯৯৭৬০৪ তাহাদের যোগ মূল সপ্তভুজের বাহু [illegible] ৫।

তিনি নবভুজের বিষয়ে কহেন "পূর্ব্ববৎ বৃত্ত নিষ্কাশিত হইলে তন্মধ্যে এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কর তাহাতে বৃত্ত পরিধি তিন সমান অংশে বিভক্ত হইবে এবং প্রত্যেক অংশে তিন সমান২ জ্যা নিষ্কাশিত হইলে নবভুজ ক্ষেত্র বৃত্তান্তর্গত হইবে ও তন্মধ্যে তিন চতুর্ভুজ ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে তাহার ভূমি বৃত্তান্তর্গত ত্রিভুজের ভুজ তুল্য। অপর ঐ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কোণ হইতে দুই লম্বপাত হইলে তাহা অংশত্রয়ে বিভক্ত হইবে প্রথম এবং শেষাংশ দুই ত্রিভুজ ও মধ্যাংশ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র হইবে

---

* কলিকাতাস্থ এস্যাটিক সোসাইটির পুস্তকালয়ে যে সূর্য্যদাস রচিত লীলাবতীর টীকা আছে তাহা হইতে উক্ত অঙ্ক অবিকল উদ্ধৃত করা গেল কিন্তু ইহার মধ্যে দুই স্পষ্ট অশুদ্ধি আছে বোধ হয় তাহার লেখকের ভ্রম বশতঃ হইয়াছে অর্থাৎ ২২৫৭৯ পরিবর্ত্তে ২২৫৮১ হইবে এবং ২১৯৯৭৬০৪ পরিবর্ত্তে ২১৯৯৭৯৭৬০৪ হইবে।

tions, the first and last of which are triangles; and the intermediate one is a tetragon. The base in each of them is a third part of the side of the inscribed triangle (?) It is the upright (of a rectangular triangle); the perpendicular is its side; and the square root of the sum of their squares is hypothenuse, and is the side of the nonagon. To find the perpendicular, put an assumed chord equal to half the chord of the (inscribed) tetragon: find its arrow in the manner aforesaid: and subtract that from the arrow of the chord of the (inscribed) triangle, the remainder is the perpendicular. Thus the perpendicular comes out 21989: it is the side (of a rectangular triangle). The third part of the inscribed triangle is 34641: it is the upright. The square root of the sum of their squares is 41031: and is the side of the inscribed nonagon. Thus all is congruous." It will not be necessary to explain to those who have carefully studied the foregoing treatise, the false and inconclusive character of this sort of reasoning.

With reference to the quadrature of the circle, the Hindus seem to have made considerable improvement between the age of Brahmagupta and that of the Lilavati. Brahmagupta gave three times the diameter as the practical circumference, the neat dimension of which, according to him, was the square root of ten times the square of the diameter.*. The author of the Lilavati allows a larger proportion for the gross circum

* That is as 3.1623 to 1, which is too great by more than [illegible] part of the whole.

"অপর সকলেরি ভূমি (বৃত্তান্তর্গত) ত্রিভুজের বাহুর তৃতীয়াংশ হইবে(?) তাহাই জাত্য ত্রিভুজের কোটি এবং উক্ত লম্ব তাহার ভুজ সুতরাং ঐ ভুজ কোটির বর্গযোগের মূল কর্ণ তাহাই নবভুজের ভুজ। অপিচ লম্ব জ্ঞাপনার্থ অন্তর্গত চতুর্ভুজের পূর্ণজ্যার অর্দ্ধ পরিমাণে একজ্যা স্বেচ্ছানুসারে কল্পনা করিয়া পূর্ব্ব ধারানুসারে তাহার শর নিশ্চয় কর এবং সেই শর অন্তর্গত ত্রিভুজের পূর্ণ জ্যার শর হইতে ব্যবকলন কর তাহাতে অবশিষ্ট যাহা থাকিবেক তাহাই লম্ব পরিমাণ হইবেক যথা লম্ব পরিমাণ ২১৯৮৯, ত হা (এক জাত্য ত্রিভুজের) ভুজ, এবং অন্তর্গত ত্রিভুজের বাহুর তৃতীয়াংশ ৩৪৬৭১, তাহাই কোটি তাহারদের বর্গযোগের মূল ৪১০৩১ তাহাই অন্তর্গত নবভুজের বাহু পরিমাণ। অতএব এ সকলি যুক্তি সিদ্ধ।" এই প্রকার তর্ক যে অলীক এবং হেত্বাভাসে পরিপূর্ণ তাহা যাঁহারা পূর্ব্বোক্ত রচনা সকল যত্ন পূর্ব্বক অধ্যয়ন করিয়াছেন তাঁহারদের নিকট বিস্তারিত করা নিষ্প্রয়োজন।

ব্রহ্মগুপ্ত এবং লীলাবতীর মধ্যে যে কাল অতীত হইয়াছিল বোধ হয় তন্মধ্যে ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরদের বৃত্ত ফল নির্ণয় প্রসঙ্গে বিজাতীয় বিদ্যা বৃদ্ধি হইয়াছিল। ব্রহ্ম গুপ্ত কহিয়াছিলেন যে স্থূল গণনায় পরিধি ব্যাসের ত্রিগুণ এবং সূক্ষ্ম পরিমাণে ব্যাসের বর্গের দশগুণের বর্গমূল তুল্য *। কিন্তু লীলাবতী রচক পরিধির স্থূল পরিমাণ তদপেক্ষা অধিক কহেন অর্থাৎ ২২ যথা ৭ সম্বন্ধে, এবং সূক্ষ্ম গণনায় সত্য

* অর্থাৎ ৩.১৬২৩ যথা ১ সম্বন্ধে, ইহা $\frac{1}{৪৮}$ পরিমাণে শুদ্ধতার অতিরিক্ত।

ference, viz. as 22 to 7; but makes a much nearer approximation in his neat estimate, which is $\frac{3927}{1250}$ of the diameter."*

The questions contained in the Lilavati are substantially the same as those contained in Brahmagupta's chapter on Plane Figure. They will serve as a good index of the amount of geometrical knowledge which may be called indigenous. It is on this account that it has been thought best to give the questions nearly in the original words, instead of stating them more concisely.

We shall quote one of the rules, and the solution of one of the questions from the Lilavati, in order to show how the Brahmins work problems on practical geometry, the rules for which are almost invariably delivered in verse.

"The *rule* for determining the base, perpendicular or hypothenuse, when any two of them are known, is given in two stanzas. One of the sides is assumed, (as the base). That which goes in a rival direction to it is, by persons acquainted with the science, called the *koti* or perpendicular, whether it be in a (rectangular) triangle or quadrilateral.

* Ganesa says that this value was probably deduced by six successive bisections of the arc subtended by the side of an equilateral hexagon, and that it represents the periphery of a polygon of 384 sides. That periphery may be otherwise represented as 3.1416 to 1 and is very near the truth. A still more accurate proportion is $\frac{355}{113}$. The method of deducing this result is taught in treatises on Trigonometry.

নির্ণয়ের আরো অধিক নিকটস্থ হইয়াছেন অর্থাৎ পরিধি পরিমাণ তাঁহার গণনায় ব্যাসের $\frac{৩৯২৭}{১২৫০}$ গুণ * ।

লীলাবতীতে ক্ষেত্র ব্যবহার বিষয়ক যেং উদাহরণ আছে সে সকলি সামান্যতঃ ব্রহ্ম গুপ্ত প্রণীত ক্ষেত্র ব্যবহারের প্রশ্ন তুল্য অতএব ভারতবর্ষীয় লোকেরা ক্ষেত্রব্যবহার সম্বন্ধে স্বয়ং কত দূর পর্য্যন্ত বিদ্যানুশীলন করিয়াছিলেন লীলাবতীর ঐ সকল উদাহরণেই তাহা প্রকাশ হইবে সেই কারণে আমরা তাহা অবিকল অনুবাদ করিলাম নচেৎ আরও সংক্ষেপে লেখা যাইতে পারিত।

ভারতবর্ষীয় পণ্ডিতেরা কিরূপে ক্ষেত্র ব্যবহারের প্রশ্ন সাধন করেন তাহা বিজ্ঞাপন করিবার নিমিত্ত আমরা এস্থলে লীলাবতীর একটী সূত্র এবং প্রশ্ন সাধনের ধারা উদ্ধৃত করিতেছি। মূলগ্রন্থে ঐ সকল সূত্র ছন্দেতে রচিত হইয়াছে।

" ভুজ কোটি কর্ণের কোন দুইটী জ্ঞাত হইলে তৃতীয় নির্ণয় করণের সূত্র দুই বৃত্ত। সমকোণি ত্রিভুজই হউক অথবা চতুর্ভুজ হউক এক বাহুকে ভুজ অর্থাৎ ভূমি বলিয়া কল্পনা করিলে অপর দিকস্থ বাহুকে গণিত শাস্ত্রজ্ঞ পণ্ডিতেরা কোটি অর্থাৎ লম্ব কহেন। ভুজ কোটির বর্গযোগের মূল কর্ণ।

---

* গণেশ নামক টীকাকার কহেন যে বোধ হয় সমবাহুক ষড়্ভুজের বাহু ব্যাপক চাপকে ক্রমশঃ ছয়বার দ্বিখণ্ড করাতে ঐ পরিমাণ লব্ধ হইয়াছে এবং ঐ সংখ্যাই ৩৮৪ ভুজ বিশিষ্ট ক্ষেত্রের পরিমিতির পরিমাণ তাহা প্রকারান্তরে এইরূপ লেখা যাইতে পারে ৩.১৪১৬ যথা ১ সম্বন্ধে, ইহা অতিশয় শুদ্ধ সন্নিহিত বটে কিন্তু $\frac{৩৫৫}{১১৩}$ কহিলে তদপেক্ষা আরো শুদ্ধ হয় ত্রিকোণ গণিত শাস্ত্রের রীত্যনুসারে ইহার উপপত্তি হইতে পারে।

"The square root of the sum of their squares is the hypothenuse. The square root of the difference of the squares of the base and hypothenuse is the perpendicular. The square root of the difference of the squares of the hypothenuse and perpendicular is the base.

Example. Perpendicular 4. Base 3. The square of the base 9. The square of the perpendicular 16. Their sum 25. The square root of this is 5. The hypothenuse is found."

Statement:

In some instances commentators have supplied demonstrations, but they would appear extremely rude to the student of Euclid.

QUESTIONS.

1. Say what will be the dimension of the hypothenuse of a right angled triangle whose perpendicular is 4 and the base 3?

2. The hypothenuse being 5 and the base 3, say how much will be the perpendicular?

3. The hypothenuse being 5 and the perpendicular 4, say what will be the base?

4. Mention a few cases of a right angled triangle having 12 for the base and rational numbers for its perpendicular and hypothenuse.

ভুজ কর্ণের বর্গান্তরের মূল কোটি। কোটি কর্ণের বর্গান্তরের মূল ভুজ।

উদাহরণ।

ন্যাস

কোটি ৪। ভুজ ৩। ভুজবর্গ ৯ কোটিবর্গ ১৬। তাহারদের যোগ ২৫। ইহার মূল ৫। কর্ণ নির্ণীত হইল।"

কোন২ স্থলে টীকাকারেরা সূত্রের উপপত্তি যোগ করিয়াছেন কিন্তু যাঁহারা ইউক্লিড অধ্যয়ন করিয়াছেন তাঁহারদের বোধে সে উপপত্তি অতি উপেক্ষণীয়।

প্রশ্ন।

১। কোন সমকোণি ত্রিভুজের ভুজ পরিমাণ ৩ এবং কোটী ৪ তাহার কর্ণ পরিমাণ কত হইবে।

২। কর্ণ পরিমাণ ৫ এবং ভুজ পরিমাণ ৩ হইলে কোটি কত হইবে।

৩। কর্ণ পরিমাণ ৫ এবং কোটি পরিমাণ ৪ হইলে ভুজ পরিমাণ কত হইবে।

৪। ভুজ পরিমাণ ১২ হইলে কর্ণ এবং কোটি অকরণ হয় এমত কএক সমকোণি ত্রিভুজ নির্দেশ কর।

5. Mention a few cases of a right angled triangle having 85 for the hypothenuse and rational numbers for the perpendicular and base.

6. Mention a few cases of right angled triangles having the base, perpendicular, and hypothenuse represented by rational numbers.

7. A Bambu tree measuring 32 cubits in height and standing upon level ground, was broken in one place by a storm ; the broken part instantly inclined towards the ground which its extremity reached at a distance of 16 cubits from the foot of the tree, say mathematician, at how many cubits from the root was the tree broken ?

8. A peacock perched on the top of a pillar 9 cubits in height. At the foot of the pillar was a snake's hole, and at a distance equal to three times its height was seen a snake. Seeing the snake glide toward the hole, the peacock pounced upon it at a place which was equi distant between the top of the pillar and the place where the snake was first seen. Say quickly at how many cubits from the snake's hole did they meet.

9. In a certain lake where cranes and *chuckwas* were desporting, there was a stalk of the lotus which rising from the bottom of the pool stood erect to the height of half a cubit above the level of the water. The lotus gradually inclined by the gentle action of the breeze, and was submerged at the distance of two cubits. Say quickly, mathematician, what was the depth of the water ?

১০। এক শত হস্ত উচ্চ এমত কোন বৃক্ষোপরি দুই বানর উপবিষ্ট ছিল এবং সেই বৃক্ষ মূলের দুই শত হস্ত দূরে এক জলাশয় ছিল। এক বানর অনতিবেগে বৃক্ষ হইতে অবরোহণ করিয়া জলাশয় সমীপে গমন করিল অন্য বানর বৃক্ষের উপর আরো কিয়দ্দূর পর্য্যন্ত লম্ফ দিয়া উঠিয়া কর্ণ পথে ঐ জলাশয়ে উড্ডীয়মান হইল কিন্তু উভয়েই সমান পথ গমন করিয়াছিল হে বিদ্বন্ যদি গণিত বিদ্যা যত্ন পূর্ব্বক অধ্যয়ন করিয়া থাক তবে শীঘ্র কহ দেখি বানর বৃক্ষের উপর কত দূর পর্য্যন্ত লম্ফ দিয়াছিল। *

১১। কোন সমকোণি ত্রিভুজে কর্ণ পরিমাণ ১৭ এবং ভুজ কোটির যুতি ২২, হে সখে ঐ ক্ষেত্রে ভুজ কোটির পৃথক২ পরিমাণ কত তাহা কহ।

১২। কোন সমকোণি ত্রিভুজে ভুজ কোটির অন্তর ৭ এবং কর্ণ পরিমাণ ১৩ তাহাতে ভুজ কোটির পৃথক২ পরিমাণ কহ।

১৩। দুই বংশ পরস্পর ৫ হস্ত পরিমাণে দূরস্থ আছে একটা ১৫ হস্ত উচ্চ অন্যটা ১০ হস্ত উচ্চ উভয়ের অগ্র সূত্র দ্বারা পরস্পরের মূলের সহিত সংযুক্ত হইলে যে স্থলে দুই সূত্রের সম্পাত হইবে তাহার উন্নতি কত তাহা কহ।

---

* ভাস্করাচার্য্য আপন কালের ভারতবর্ষীয় কপির যে অদ্ভুত চরিত কল্পনা করিয়াছেন তাহা প্রত্যক্ষ দৃষ্ট পদার্থ বিষয়ক নিয়মের বিপরীত। ব্রহ্ম গুপ্ত অথবা তাঁহার টীকাকার ঐ উদাহরণ প্রকারান্তরে লিখিয়াছেন তিনি বৃক্ষের পরিবর্ত্তে পর্ব্বত, হ্রদের পরিবর্ত্তে নগর, এবং দুই কপির পরিবর্ত্তে দুই সন্ন্যাসির কল্পনা করিয়াছেন কিন্তু লম্ফকারি সন্ন্যাসিকে মায়াবী বলিয়া অদ্ভুত লম্ফনের হেতু নির্দ্দেশ করেন।

14. Show that it will be the impossible to construct the two following figures: A quadrilateral with 12 for its base, 3 for the side opposite to the base, and 2 and 6 its two adjacent sides. A triangle with 3, 6, 9 for its three sides respectively.

15. There is a triangle whose base is 14 cubits, and its two sides 13 and 15 respectively. Say quickly what its altitude and area are, as also the length of the two segments into which the base is divided by the altitude.

16. In an obtuse angled triangle the base which is adjacent to the obtuse angle is 9 cubits and the two sides respectively 10 and 17. Tell me quickly, expert mathematician, what its altitude and area are, as also the distance of the perpendicular from the obtuse angle.

17. In a quadrilateral figure whose base and its opposite side are parallel and are respectively 14 and 9 cubits, the other two sides being 13 and 12, and the altitude being also 12; tell the area as it was taught by the ancients.

18. If the side of a rhombus be 25 cubits and one of its diagonals 30, what will be the length of the other diagonal? and what will be the diagonal of a square whose side is 25?

19. What will be the area of a rectangle two of whose adjacent sides are respectively 8 and 6.

20. In an equi-perpendicular quadrilateral figure, the base is 22 cubits, its opposite side 11 cubits, the two adjacent sides are respectively 20 and 13 and the altitude 12; say what is the area of the figure.

৫। কর্ণ পরিমাণ ৮৫ হইলে ভুজ কোটি অকরণী হয় এমত কতিপয় সমকোণি ত্রিভুজ নির্দ্দেশ কর।

৬। ভুজ কোটি এবং কর্ণ অকরণী হয় এমত কতিপয় সমকোণি ত্রিভুজ নির্দ্দেশ কর।

৭। ৩২ হস্ত উচ্চ একটা বংশ সম ভূমিস্থ আছে বায়ুর বেগে অকস্মাৎ কোন স্থলে ভগ্ন হওয়াতে ভগ্নাংশ নত হইয়া পড়িয়া বংশ মূলের ১৬ হস্ত দূরে ভূমি সংলগ্ন হইল হে গণক বল দেখি মূল হইতে কত হস্ত উচ্চে ঐ বংশ ভগ্ন হইয়াছিল।

৮। ৯ হস্ত উচ্চ এক স্তম্ভোপরি এক ময়ূর উপবিষ্ট ছিল এবং সেই স্তম্ভতলে এক সর্পের গর্ত্ত ছিল এবং তথা হইতে স্তম্ভের ত্রিগুণ পরিমাণ দূরে এক সর্প দৃষ্ট হইল। ময়ূর সর্পকে গর্ত্তে যাইতে দেখিয়া তাহার উপর আসিয়া পড়িল যে স্থানে ময়ূর পতিত হইল তাহা স্তম্ভাগ্র এবং প্রথমতঃ সর্প দৃষ্ট হইবার স্থল হইতে সমদূর। এস্থলে গর্ত্ত হইতে কতিপয় হস্ত দূরে সর্প ময়ূরের সম্পাত হইল তাহা শীঘ্র কহ।

৯। যাহাতে বক এবং চক্রবাক জল ক্রীড়া করিতেছে এমত কোন হ্রদে এক কমল কলিকা হ্রদের তল হইতে উঠিয়া জলের উপর বিতস্তি পরিমাণ উন্নত ছিল পরে বায়ুর মন্দ২ গতিতে ক্রমশ নত হইয়া দুই হস্ত দূরে গিয়া জল মগ্ন হইল। হে গণক ঐ জল কত গভীর ছিল তাহার পরিমাণ শীঘ্র কহ

10. Two monkeys were sitting on the top of a tree 100 cubits high, and at the distance of 200 cubits from the foot of the tree, there was a pool of water. One of the monkeys gently descended from the tree and went directly to the pool; the other vaulted to some height perpendicularly from the top of the tree, and from thence leaped diagonally to the pool. Both monkeys went over the same space in these several ways. Tell me quickly learned man the height of the leap above the tree, if you have diligently studied mathematics ?*

11. In a right angled triangle the hypothenuse is 17 and the sum of the base and perpendicular 23, tell me my friend how much the base and perpendicular are?

12. In a right angled triangle the difference between the base and perpendicular is 7 and the hypothenuse 13. Can you tell me how much the base and perpendicular are?

13. Two Bambus, one 15 cubits in height, the other 10 cubits, are at a distance of 5 cubits from one another. The foot of the one being mutually joined by a string with the top of the other, say what will be the altitude of the point where the two strings will cross each other.

---

* Bhaskaracharya supposes the Indian monkey of his time to have been capable of performing feats which are inconsistent with the laws of mechanics as we now find them. Brahmagupta or (rather his commentator) had given the same example in another form. A hill stood for the tree—a town for the lake and two hermits for the two monkeys.—In that case, however, the extraordinary leap was explained by supposing the leaper to be a wizard.

২১। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ৭৫ হস্ত, তৎসম্মুখস্থ ভুজ পরিমাণ ৫১, এবং দুই পার্শ্ব পরিমাণ ক্রমশঃ ৪০ এবং ৬৮ নির্দ্দিষ্ট আছে এবং ভূমির পার্শ্বস্থ লম্ব ৪০ হস্ত তাহার ক্ষেত্র ফল এবং দুই কর্ণের পরিমাণ তথা অপর শৃঙ্গ হইতে পতিত লম্ব পরিমাণ কত তাহা কহ।

২২। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি ৬০ হস্ত তৎসম্মুখস্থ ভুজ ২৫, দুই পার্শ্ব ৩৯ এবং ৫২ এবং এক কর্ণ ৬৩ তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

২৩। এক বিষম চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ৩০০ হস্ত তৎসম্মুখস্থ ভুজ ১২৫, দুই পার্শ্ব ২৬০ এবং ১৯৫, দুই কর্ণ ৩১৫ এবং ২৮০, দুই শৃঙ্গ হইতে পতিত দুই লম্ব ২৮৯এবং ২২৪, তাহার কর্ণ এবং লম্ব কত দূর উঠিয়া সম্পাতিত হইবে এবং দুই কর্ণের সম্পাত চিহ্ন হইতে পতিত লম্ব পরিমাণ কত? আর দুই পার্শ্বস্থ বাহু বর্দ্ধিত হইলে কত দূরে পরস্পর সম্পাতিত হইবে? এবং সেই সম্পাত চিহ্ন হইতে ভূমি পর্য্যন্ত লম্বপাত করিলে সে লম্বের পরিমাণ কত? তাহার আবাধের পরিমাণই বা কত? এবং বিষম চতুর্ভুজের শৃঙ্গোপরি উৎপন্ন সূচী অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল কত? অপর দুই কর্ণ বর্দ্ধিত হইয়া কত দূরে ভূম্যগ্র হইতে নিষ্কাসিত লম্বের সহিত সম্পাতিত হইবে আর ঐ লম্বের প্রত্যেকের পরিমাণই বা কত হইবে? এই সকল প্রশ্নের উত্তর প্রদান কর।

২৪। বৃত্ত ব্যাসের পরিমাণ ৭ হইলে পরিধি পরিমাণ কত হইবে এবং পরিধি পরিমাণ ২২ হইলে ব্যাসের পরিমাণ কত হইবে।

25. The diameter of a circle being 10 cubits, what will be the length of the *arrow* or straight line bisec a chord, 6 cubits in length, at right angles and intercepted between the chord and its arc.

26. If you are acquainted with the spotless Lilavati, say what will be the area of a circle whose diameter is seven? Say also what will be the are of a covering like a net on the surface, as well as the solid contents of a sphere whose diameter is seven?

27. What will be the length of the side of an equilateral triangle inscribed in a circle whose diameter is 2000?

28. What will be the length of the side of a square inscribed in such a circle?

29. What will be the length of the side of an equilateral pentagon inscribed as before?

30. What will be the length of the side of an equilateral hexagon inscribed as before?

31. What will be the length of the side of an equilateral heptagon inscribed as before?

32. What will be the length of the side of an equilateral octagon inscribed as before?

33. What will be the length of the side of an equilateral nonagon inscribed as before

34. The diameter of a circle being 240 cubits and its circumference being divided into 18 equal parts, what will be the length of the several chords of the following arcs, viz. one-eighteenth, two-eighteenths, three-eighteenths, &c. up to nine-eighteenths of the

১৪। নিম্ন লিখিত দুই ক্ষেত্র অসম্ভব তাহা উপপন্ন কর যথা ভূমি পরিমাণ ১২, ভূমি সম্মুখস্থ বাহু ৩, এবং দুই পার্শ্ব ২ এবং ৬ এমত এক চতুর্ভুজ, আর তিন বাহু ক্রমশঃ৩, ৬, ৯ এমত ত্রিভুজ ক্ষেত্র।

১৫। ভূমি ১৪ হস্ত এবং দুই বাহু ক্রমশঃ ১২ এবং ১৫ হস্ত এমত এক ত্রিভুজ নির্দ্দিষ্ট আছে তাহার লম্ব এবং ক্ষেত্র ফল কত আর দুই আবাধের পরিমাণইবা কত শীঘ্র কহ।

১৬। এক অধিক কোণি ত্রিভুজে অধিক কোণ সংলগ্ন ভূমি ৯ হস্ত এবং দুই বাহু ক্রমশঃ ১০ এবং ১৭ নির্দ্দিষ্ট আছে হে গণিত বিশারদ তাহার লম্ব ও ফল কত এবং অধিক কোণ ও লম্বের মধ্যে ব্যবধানই বা কত তাহা শীঘ্র কহ।

১৭। এক সমলম্ব চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি ১৪ হস্ত, মুখ অর্থাৎ ভূমির সম্মুখস্থ ভুজ ৯ হস্ত, দুই পার্শ্ব ক্রমশঃ ১৩ এবং ১২ এবং লম্বও ১২ নির্দ্দিষ্ট আছে প্রাচীনদিগের কথনানুসারে তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

১৮। এক সমবাহু সমানান্তরাল চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভুজ পরিমাণ ২৫ হস্ত এবং এক কর্ণের পরিমাণ ৩০ হস্ত তাহাতে অপর কর্ণের পরিমাণ কত তাহা কহ এবং কোন সম চতুর্ভুজের ভুজ পরিমাণ ২৫ হইলে কর্ণ পরিমাণ কত হইবে তাহা কহ।

১৯। এক আয়তের দুই বাহু ক্রমশঃ ৮ এবং ৬ নির্দ্দিষ্ট আছে তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

২০। এক সমলম্ব চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ভূমি পরিমাণ ২২ হস্ত এবং সম্মুখস্থ ভুজ পরিমাণ ১১ হস্ত, তথা দুই পার্শ্ব পরিমাণ ক্রমশঃ ২০ এবং ১৩ হস্ত এবং লম্ব পরিমাণ ১২ হস্ত নির্দ্দিষ্ট আছে তাহার ক্ষেত্র ফল কত তাহা কহ।

21. In a trapezium the base is 75 cubits, the side opposite to the base 51, the adjacent sides are respectively 40 and 68, the former being also perpendicular to the base; say what its area is, as well as the length of the diagonals and of the perpendicular from the other vertex.

22. In a trapezium the base is 60, the opposite side 25, the adjacent sides 39 and 52 and one of the diagonals is 63; what is its area?

23. In a trapezium the base is as 300 cubits, the opposite side 125, the two adjacent sides 260 and 195, the diagonals 315 and 280, the perpendiculars from the vertices 189 and 224; what portions of the diagonals and the perpendiculars are below their intersections? What will be the length of the perpendicular let fall from the intersection of the diagonals? and the segments of the base answering thereto? How far must the adjacent sides be produced before they will meet, and what will be the length of the perpendicular let fall from that point of contact upon the base? what the segments answering to it? and what the area of the triangle thus formed on the summit of the trapezium? how far must each of the diagonals be produced before it will meet a perpendicular drawn from the opposite extremity of the base, and what will be the length of each of the perpendiculars?

24. What will be the length of the circumference of a circle whose diameter is 7? and what will be the length of the diameter if the circumference is 22?

২৫। হে সুবুদ্ধি পুরুষ যদি বিমলা লীলাবতী অবগত হইয়াছ তবে বল দেখি বৃত্ত ব্যাস ৭ হইলে তৎক্ষেত্র ফল কত হইবে? এবং গোলের ব্যাস পরিমাণ ঐরূপ হইলে কন্দুক জালের ন্যায় তৎপৃষ্ঠ ফল কত ও তন্মধ্যস্থিত ঘন ফলই বা কত হইবে।

২৬। বৃত্ত ব্যাস ১০ হস্ত পরিমাণ নিরূপিত আছে তাহাতে ৬হস্ত পরিমিত পূর্ণজ্যার শর অর্থাৎ ঐ জ্যার দ্বিখণ্ড কারিণী অথচ জ্যা এবং চাপের মধ্যবর্ত্তিনী লম্ব রেখার পরিমাণ কত হইবে তাহা কহ।

২৭। বৃত্ত ব্যাস পরিমাণ ২০০০ হইলে তদন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের ভুজ পরিমাণ কত হইবে।

২৮। ঐ রূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক চতুর্ভুজের পরিমাণ কত?

২৯। ঐরূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক পঞ্চভুজের পরিমাণ কত?

৩০। ঐ রূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক ষড়্‌ভুজের পরিমাণ কত?

৩১। ঐ রূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক সপ্তভুজের পরিমাণ কত?

৩২। ঐ রূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক অষ্টভুজের পরিমাণ কত?

৩৩। ঐ রূপ বৃত্তান্তর্গত সমবাহুক নবভুজের পরিমাণ কত?

৩৪। বৃত্তের ব্যাস পরিমাণ ২৪০ হস্ত নিরূপিত আছে এবং পরিধি সমানং অষ্টাদশ অংশে বিভক্ত আছে অতএব তাহার একাংশ দুই অংশ তিনঅংশ ইত্যাদি নবাংশ পর্য্যন্ত পৃথকং চাপের পূর্ণজ্যা পরিমাণ কিং হইবে।

GLOSSARY OF TERMS.

English.	*Bengali.*
Acute angle.	লঘু কোণ।
Acute angled triangle	লঘু কোণি ত্রিভুজ।
Addition	সঙ্কলন।
Adjacent	সংলগ্ন, সন্নিহিত
Algebra.	বীজ গণিত।
Alternando.	বিনিময় নিষ্পত্তি।
Alternate	অপর পার্শ্বস্থ।
Altitude.	উন্নতি।
Angle.	কোণ।
Annulus.	বলয়।
Antecedent.	অগ্রবর্ত্তি।
Arc	চাপ।
Arithmetic.	অঙ্কগণিত।
Axiom.	স্বতঃসাধ্য।
Base.	ভূমি।
Biquadrate.	চতুর্ঘাত।
Bisect.	দ্বিখণ্ড।
Catenary.	শৃঙ্খল রেখা।
Centre.	কেন্দ্র।
Chord.	পূর্ণজ্যা।

Bengali.	*English.*
অকরণী	Rational.
অগ্রবর্ত্তি	Antecedent
অঙ্কগণিত	Arithmetic
অণ্ডাকৃতি	Oval.
অধিক কোণ	Obtuse-angle.
অধিক কোণি ত্রিভুজ	Obtuse angled triangle
অনুপাত	Proportion.
অনুপাতীয়	Proportional.
অনুমান	Corollary
অন্তর	Difference.
অন্তর্গত	Inscribed.
অপবর্ত্ত্য	Multiple.
অপবর্ত্তন	Measure.
অপর পার্শ্বস্থ	Alternate.
অবনতি	Inclination
অবশিষ্ট	Complement
অর্দ্ধচন্দ্রাকৃতি	Lune.
অর্দ্ধবৃত্ত	Semi-circle.
অসীম, অপরিমিত	Unlimited, Indefinite.
উন্নতি	Altitude.

English.	*Bengali.*
Circle.	বৃত্ত।
Circumference.	পরিধি।
Co-efficient.	গুণক।
Complement.	অবশিষ্ট।
Componendo.	যোগ নিষ্পত্তি
Concave.	উত্তানাকৃতি।
Concentric.	সমকেন্দ্র।
Consequent.	পশ্চাদ্বর্ত্তি।
Contact.	স্পর্শন।
Continued proportion.	অবিরতনিষ্পত্তি
Convertendo.	পরিবর্ত্তনিষ্পত্তি
Convex.	ন্যুব্জাকৃতি।
Corollary.	অনুমান।
Cube.	ঘন।
Cycloid.	স্যন্দন রেখা।
Decagon.	দশভুজ।
Demonstration.	উপপত্তি।
Describe.	নিষ্কাসন।
Diagonal.	কর্ণ।
Diameter (*of a circle.*)	ব্যাস।
Diameter (*of a quadrilateral figure.*)	কর্ণ।
Difference.	অন্তর।
Dividendo.	বিয়োগ নিষ্পত্তি।

Bengali.	*English.*
উপপত্তি	Demonstration.
উপপাদ্য	Theorem.
উভয়তঃ	Reciprocal.
ঋণ চিহ্ন	Minus.
করণী	Surd.
কর্কট	Radius.
কর্ণ	Diagonal, hypothenuse.
কেন্দ্র	Centre.
কোটি	Perpendicular
কোণ	Angle.
খণ্ড	Segment.
গণিত শাস্ত্র	Mathematics.
গুণক	Co-efficient.
গোল	Sphere.
ঘাতজ্ঞাপক	Exponent.
চাপ	Arc.
চতুর্ঘাত	Biquadrate.
চতুর্ভুজ	Quadrilateral.
জাত্য ত্রিভুজ	Rectangular triangle.
টীকা	Scholium.
ত্রিখণ্ড	Trisect.
ত্রিভুজ	Triangle.
দশভুজ	Decagon.

English.	*Bengali.*
Duplicate ratio.	দ্বিঘাত নিষ্পত্তি।
Ellipse.	অণ্ডাকৃতি,বৃত্তাভাস।
Equiangular.	সমান কোণি।
Equilateral.	সম বাহুক।
Equimultiple.	সম অপবর্ত্ত্য।
Ex-equali.	সাম্যানাতঃ।
Exponent.	ঘাত মাপক।
Figure.	ক্ষেত্র।
Given.	নির্দ্দিষ্ট।
Geometry.	ক্ষেত্র তত্ত্ব।
Gnomon.	শঙ্কু।
Hexagon.	ষড়্ভুজ।
Homologous.	সবর্ণীয়।
Hyperbola.	হাইপর্বোলা।
Hypothenuse.	কর্ণ।
Inclination.	অবনতি।
Indefinite.	অসীম, অপরিমিত।
Inscribe.	অন্তর্গত করণ।
Intersection.	সম্পাত।
Invertendo.	বিলোম নিষ্পত্তি।
Irrational.	করণী।
Isosceles.	সমদ্বিবাহুক।
Line.	রেখা।
Logarithm.	লগারিথম,ঘাত মাপক।

Bengali.	*English.*
দ্বিখণ্ড।	Bisect.
দ্বিঘাত নিষ্পত্তি	Duplicate ratio
ধন চিহ্ন	Plus.
ধরাতল	Plane.
নির্দ্দিষ্ট	Given.
নিষ্কাসন	Describe.
নিষ্পত্তি	Ratio.
পঞ্চদশভুজ	Quindecagon.
পঞ্চভুজ	Pentagon.
পরিধি।	Circumference
পরিমিতি	Perimeter
পরিবর্ত্ত নিষ্পত্তি	Convertendo
পশ্চাদ্বর্ত্তি	Consequent
পূর্ণজ্যা	Chord.
প্রতিজ্ঞা	Proposition
বর্গ	Square
বর্গমূল	Square root.
বলয়	Annulus.
বহুভুজ	Polygon.
বিজাতীয়	Unlike.
বিনিময় নিষ্পত্তি	Alternando.
বিন্দু	Point.
বিয়োগ নিষ্পত্তি	Dividendo.

English.	*Bengali.*
Lune.	অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি
Magnitude.	মহত্ত্ব, রাশি।
Mathematics.	গণিত শাস্ত্র।
Mean proportional.	মধ্যানুপাতীয়
Measure.	অপবর্ত্তন।
Minus.	ঋণ চিহ্ন।
Multilateral.	বহু ভুজ।
Multiple.	অপবর্ত্ত
Oblong.	আয়ত।
Obtuse angle.	অধিক কোণ
Obtuse-angled triangle.	অধিক কোণি ত্রিভুজ।
Oval.	অণ্ডাকৃতি।
Parabola.	ক্ষেপণি রেখা।
Parallel.	সমানান্তরাল।
Parallelogram.	সমানান্তরাল ক্ষেত্র।
Pentagon.	পঞ্চভুজ।
Perimeter.	পরিমিতি।
Permutando.	বিনিময়নিষ্পা
Perpendicular	লম্ব।
Plane superficies.	সমধরাতল।
Plus.	ধন চিহ্ন।
Point.	বিন্দু।
Polygon.	বহুভুজ।
Postulate.	স্বীকার্য্য কথা।

Bengali.	*English.*
বিলোম নিষ্পত্তি	Invertendo.
বিষম চতুর্ভুজ	Trapezium.
বিষম বাহুক	Scalene.
বীজগণিত	Algebra.
ব্যবকলন	Subtraction.
ব্যাস	Diameter.
ব্যাসার্দ্ধ	Semi-diameter
বৃত্ত	Circle.
বৃত্তচ্ছেদক	Sector.
বৃত্তপাদ	Quadrant.
বৃত্তপাদ সংলগ্ন	Quadrantal.
বৃত্ত স্পর্শক	Tangent.
বৃত্তাভাস	Ellipse.
ভুজ	Side.
ভূমি	Base.
মধ্যানুপাতীয়	Mean proportional.
মহত্ত্ব	Magnitude.
যোগ নিষ্পত্তি	Componendo.
যোগ, যুতি	Sum.
রম্বস	Rhombus.
রম্বয়েড	Romboid.

English.	*Bengali.*
Problem.	সম্পাদ্য।
Proportion.	অনুপাত।
Porportional.	অনুপাতীয়।
Proposition.	প্রতিজ্ঞা।
Quadrant.	বৃত্তপাদ।
Quadrantal.	বৃত্তপাদ সংক্রান্ত।
Quadrilateral.	চতুর্ভুজ।
Quadruplicate.	চতুর্ঘাত।
Quantity.	রাশি।
Quindecagon.	পঞ্চদশভুজ
Radius.	কর্কট, ব্যাসার্দ্ধ
Ratio.	নিষ্পত্তি।
Rational.	অকরণী।
Reciprocal.	উভয়তঃ।
Rectangle.	আয়ত।
Rectilineal.	সরল রৈখিক।
Rhomboid.	রম্বয়েড।
Rhombus.	রম্বস।
Right angle.	সমকোণ।
Right angled triangle.	সমকোণি, কিম্বা জাত্য ত্রিভুজ।
Scalene.	বিষম বাহুক।
Scholium.	টীকা।
Sector.	বৃত্তচ্ছেদক।
Segment.	খণ্ড।
Semicircle.	অর্দ্ধবৃত্ত।

Bengali.	*English.*
রাশি	Quantity.
রেখা	Line.
লঘু কোণ	Acute angle.
লঘু কোণি ত্রিভুজ	Acute angled triangle.
লম্ব	Perpendicular
লগারিথম	Logarithm.
শঙ্কু	Gnomon.
শর	Arrow, versed sine.
শৃঙ্খল	Vinculum.
শৃঙ্খল রেখা	Catenary.
শৃঙ্গ	Vertex.
শৃঙ্গস্থ	Vertical.
ষড়্ভুজ	Hexagon.
সঙ্কলন	Addition.
সদৃশ	Similar.
সম অপবর্ত্ত্য	Equimultiple
সমকেন্দ্র	Concentric.
সম কোণ	Right angle.
সম কোণি ত্রিভুজ	Right angled triangle.
সম চতুর্ভুজ	Square.
সম দ্বিবাহুক ত্রিভুজ	Isosceles triangle.

English.	*Bengali.*
Similar.	সদৃশ ।
Sphere.	গোলক ।
Square (Geometrical.)	সমচতুর্ভুজ ।
Square (Numerical.)	বর্গ ।
Square root.	বর্গমূল ।
Straight line.	সরল রেখা ।
Subtend.	সম্মুখস্থ হওন ।
Subtraction.	ব্যবকলন ।
Sum.	যোগ, যুতি ।
Superficies.	[illegible] ।
Surd.	করণী ।
Tangent.	[illegible] স্পর্শক ।
Theorem.	উপপাদ্য ।
Touch.	স্পর্শ ।
Trapezium.	বিষমচতুর্ভুজ ।
Triangle.	ত্রিভুজ ।
Trilateral.	ত্রিভুজ ।
Triplicate.	ত্রিঘাত ।
Trisect.	ত্রিখণ্ড, তিন সমান ভাগে বিভক্ত করণ ।
Unlike.	বিজাতীয় ।
Vertex.	শৃঙ্গ ।
Vertical.	শৃঙ্গস্থ ।
Vinculum.	শৃঙ্খল ।

Bengali.	*English.*
সমলম্ব	Equi-perpendicular.
সমবাহুক	Equilateral.
সমান কোণি	Equiangular.
সমান্তরাল	Parallel.
সমানান্তরাল ক্ষেত্র	Parallelogram
সম্পাত	Intersection.
সম্পাদ্য	Problem.
সম্মুখস্থ	Opposite.
সবর্গীয়	Homologous.
সরল রেখা	Straight line.
সরলরৈখিক	Rectilineal.
সামানান্তঃ	Ex-æquali.
স্পর্শক	Tangent.
স্পর্শন	Contact.
স্যন্দন রেখা	Cycloid.
স্বতঃসাধ্য	Axiom.
স্বীকার্য্য কথা	Postulate.
সংলগ্ন, সন্নিহিত	Adjacent.
হাইপর্বোলা	Hyperbola.
ক্ষেত্র	Figure.
ক্ষেপণি রেখা	Parabola.

অনুমান। কঘঙ ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজের সদৃশ কেননা খকঘ গকঙ ত্রিভুজে ঘ এবং ঙ সমকোণ এবং ক কোণ উভয় পক্ষে সামান। হওয়াতে তাহারা সমান কোণি হইবে একারণ খক: কঘ:: গক: কঙ সুতরাং বিনিময় নিষ্পত্তিতে খক: গক:: কঘ: কঙ অতএব খকগ ঘকঙ ত্রিভুজের ক সামান্য কোণ এবং তৎপার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতীয় হওয়াতে তাহারা সমান কোণি এবং সদৃশ (৬ । ৬)।

ট প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন কোণ হইতে সম্মুখস্থ বাহু কিম্বা ভূমিতে যদি লম্বপাত হয় তবে অন্য দুই বাহুর যোগ এবং অন্তরের আয়ত ভূমির লম্ব দ্বারা ছিন্ন দুই খণ্ডের যোগ এবং অন্তরের আয়ত তুল্য হইবে।

কখগ ত্রিভুজের ক কোণ হইতে খগ ভূমির উপর কঘ লম্বপাত কল্পনা কর, তাহাতে খঘ ঘগ ভূমির খণ্ড হওয়াতে (কগ + কখ) (কগ—কখ) =(গঘ + ঘখ) (গঘ—ঘখ) হইবে।

ক কেন্দ্র হইতে দুই বাহুর বৃহত্তর কগ কর্কট করিয়া গচছ

বৃত্ত নিষ্কাশন কর এবং কখ রেখাকে পরিধিস্থ চ ঙ পর্যান্ত বৃদ্ধি কর অপর গঘ রেখাকে ছ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। কচ= কগ

AB to meet the circumference in E and F, and CB to meet it in G. Then because AF = AC, BF = AB + AC, the sum of the sides; and since AE = AC, BE = AC — AB = the difference of the sides. Also, because AD drawn from the centre cuts GC at right angles, it bisects it (3. 3.); therefore, when the perpendicular falls within the triangle, BG = DG — DB = DC — DB = the difference of the segments of the base, and BC = BD + DC = the sum of the segments. But when AD falls without the triangle, BG = DG + DB = CD + DB = the sum of the segments of the base, and BC = CD—DB = the difference of the segments of the base. Now, in both cases, because B is the intersection of the two lines FE, GC, drawn in the circle, FB.BE = CB.BG (35. 3.): that is, as has been shewn, (AC + AB), (AC — AB) = (CD + DB) (CD—DB.) Therefore &c. Q. E. D.

'Cor. 1. The rectangle contained by the sum and difference of the two sides, is equal to twice the rectangle contained by the base, and the segment between the middle of the base and the perpendicular on it from the opposite angle. Let H be the middle of base, and when the perpendicular AD falls within the triangle, take HK equal to HD: then CK = BD, and CD— BD = DK = 2DH.

Again, when AD falls without the triangle, it is evident that the sum of CD and BD is equal to the sum of CB and 2BD, or to the sum of 2BH and 2BD, that is to 2DH. Since then, in the first case, CD + BD = BC, and CD — BD = 2HD; and in the second, CD — BD = BC, and CD + BD = 2DH, it is manifest from the proposition, that in both (CA + AB) (CA — AB) = 2HD.CB.

Cor. 2. The difference between the squares of any two sides of a triangle, is equal to the difference between the squares of the segments, into which the remaining side is divided by a perpendicular from the opposite angle.

সুতরাং খচ=কখ+ কগ অর্থাৎ ত্রিভুজের দুই বাহুর যোগ। তথা কঙ = কগ একারণ খঙ = কগ—কখ অর্থাৎ উক্ত দুই বাহুর অন্তর। অপর কঘ রেখা গছ রেখার উপর কেন্দ্র হইতে লম্বভাবে নিষ্কাসিত হওয়াতে তাহা গছ রেখাকে দ্বিখণ্ড করিতেছে। (৩।৩) অতএব লম্ব ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে খছ=ঘছ —খঘ= গঘ—খঘ = ভূমি খণ্ডের অন্তর এবং খগ= খঘ+ ঘগ=ভূমি খণ্ডের যোগ। পরন্তু লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে পড়িলে খছ = ঘছ+ঘখ =গঘ+ঘখ= ভূমিখণ্ডের যোগ এবং খগ= গঘ—ঘখ=ভূমিখণ্ডের অন্তর। উভয় পক্ষেই খ বিন্দু বৃত্ত মধ্যে নিষ্কাসিত ওচ এবং গছ রেখার পরস্পর সম্পাত চিহ্ন হওয়াতে চখ.খঙ = গখ.ছখ অর্থাৎ যেমত পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে (কগ + কখ). (কগ—কখ) = (গঘ + ঘখ). গঘ—ঘখ অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

১ অনুমান। দুই বাহুর যোগ এবং অন্তরের আয়ত ভূমির এবং ভূমি মধ্য ও লম্বের মধ্যবর্ত্তি খণ্ডের আয়তের দ্বিগুণ হইবে। জ ভূমি মধ্য কল্পনা কর এবং কঘ লম্ব ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে জট জঘ সমান কল্পনা কর তাহাতে গট = খঘ এবং গঘ -খঘ=ঘট=২ঘজ।

অপর স্পষ্ট বোধ হইতেছে কঘ লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে পড়িলে গঘ এবং খঘ রেখার যোগ খগ এবং ২খঘ অথবা ২খজ এবং ২খঘ যোগ তুল্য অর্থাৎ ২ঘজ তুল্য। প্রথম প্রকরণে গঘ + খঘ=খগ এবং গঘ—খঘ= ২জঘ দ্বিতীয় প্রকরণে গঘ—খঘ=খগ এবং গঘ + খঘ= ২ঘজ অতএব উক্ত প্রতিজ্ঞাতে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে উভয় প্রকরণে (গক + কখ). (গক—কখ)= ২ জঘ. গখ।

২ অনুমান। ত্রিভুজের দুই বাহুর সম চতুর্ভুজের অন্তর অবশিষ্ট বাহুর সম্মুখস্থ কোণ হইতে নিষ্কাসিত লম্ব দ্বারা ছিন্ন দুই খণ্ডের সমচতুর্ভুজের অন্তর তুল্য হইবে।

For since by the proposition
$(AC + AB)(AC - AB) = (CD + DB)(CD - DB)$, and $(AC + AB)(AC - AB) = AC^2 - AB^2$ (Cor 5. 2.); also $(CD + DB)(CD - DB) = CD^2 - DB^2$ (Cor. 5. 2.); therefore $AC^2 - AB^2 = CD^2 - DB^2$.

PROP. L. THEOR.

If the bases of four rectangles be proportionals, and also their altitudes; the rectangles themselves shall be proportionals.

Let A, B, C, D, be the bases of four rectangles, and E, F, G, H, their altitudes; and let A : B : : C : D, and E : F : : G : H; the rectangles A.E, B.F, C.G, D.H are proportionals.

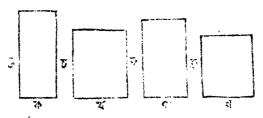
For the ratio of the rectangle A.E to the rectangle B.F is compounded of the ratios of A to B, and E to F (23. 6.), which, by hypothesis, are the same as the ratios of C to D, and of G to H: but the ratio of the rectangle C.G to the rectangle D.H is compounded of the same ratios (23. 6.); therefore the rectangle A.E is to the rectangle B.F, as the rectangle C.G to the rectangle D.H (F. 5.). Q. E. D.

কেনন। পূর্ব্বোক্ত প্রতিজ্ঞানুসারে

(কগ + কখ).(কগ—কখ) = (গঘ + ঘখ).(গঘ—ঘখ) এবং (২. ৫ অনুমান) (কগ + কখ).(কগ—কখ) = কগ² —কখ² তথা (গঘ + ঘখ).(গঘ—ঘখ) = গঘ²—ঘখ² অতএব কগ²—কখ² = গঘ² — ঘখ²।

৯ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

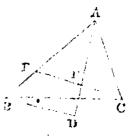
চারি আয়তের ভূমি এবং উন্নতি যদি অনুপাতীয় হয় তবে ঐ আয়ত সকলও অনুপাতীয় হইবে।

ক, খ, গ, ঘ, চারি আয়তের ভূমি এবং ঙ, চ, ছ, জ, তাহারদের উন্নতি হউক এবং ক : খ :: গ : ঘ ও ঙ : চ :: ছ : জ

কল্পনা কর ইহাতে ক.ঙ, খ.চ, গ.ছ, ঘ.জ, আয়ত অনুপাতীয় হইবে।

কেনন। ক.ঙ. খ.চ আয়তের পরস্পর নিষ্পত্তি পরিমাণ ক, খ এবং ঙ, চ রেখার পরস্পর নিষ্পত্তি পরিমাণের যোগোৎপন্ন (৬।২৩) অপর কল্পনানুসারে ঐ সকল রেখার নিষ্পত্তি পরিমাণ গ, ঘ এবং ছ, জ রেখার পরস্পর নিষ্পত্তি পরিমাণ তুল্য এবং গ. ছ ও ঘ জ আয়তের পরস্পর নিষ্পত্তি পরিমাণ ঐ শেষোক্ত রেখার পরিমাণের যোগোৎপন্ন অতএব ক.ঙ আয়ত যথা খ.চ সম্বন্ধে গ.ছ তথা ঘ.জ সম্বন্ধে উপপন্ন হইল (৫।৮)। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. M. THEOR.

If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line, which bisects the angle opposite to the base; the area of the triangle is equal to the rectangle contained by either of the perpendiculars, and the segment of the bisecting line between the angle and the other perpendicular.

Let ABC be any triangle, of which BC is the base, AD a line bisecting the opposite angle, and BD, CE perpendiculars on that line: The area of the triangle ABC is equal to the rectangle CE.AD; and it is also equal to the rectangle BD.AE.

Produce CE, the perpendicular drawn from one of the extremities of the base, to meet the opposite side in F; the lines CF, BD will manifestly be parallel, and DE perpendicular to them both (27. 1.) And because in the triangles AEC, AEF the angle AEC is equal to AEF, EAC to EAF, and the side A E is common, the triangles are in all respects equal (26. 1.); therefore CF is bisected in E. Again, because the triangle BAC is the sum of the triangles ACF, BCF, and the triangle ACF is equal to the rectangle contained by CE and AE (41. 1.), and the triangle BCF to the rectangle contained by CE and DE (41. 1.): therefore the triangle ABC is equal to the sum of the rectangles contained by CE and AE, CE and DE, and hence it is equal to the rectangle CE.AD (1. 2.). And because the triangles BAD, CAE are equiangular, AD : BD : : AE : CE (4. 6.); therefore the rectangle CE.AD is equal to BD.AE (16. 6.), wherefore, either of these is

ড প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখার উপর যদি ভূমির দুই প্রান্ত হইতে লম্বপাত হয় তবে একটী লম্ব রেখার এবং শৃঙ্গস্থ কোণ ও অন্য লম্ব মধ্যবর্ত্তি দ্বিখণ্ডকারিণী রেখার খণ্ডের আয়ত ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল তুল্য হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমি এবং কঙ শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখা আর খঘ গঙ ঐ রেখার লম্ব কল্পনা কর। কখগ ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল গঙ.কঘ অথবা খঘ.কঙ আয়ত তুল্য হইবে।

ভূমির এক প্রান্ত হইতে নিষ্কাসিত গঙ লম্বকে সম্মুখবর্ত্তি বাহুস্থ চ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। গচ খঘ পরস্পর সমানান্তরাল ইহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে এবং ঘঙ তাহাদের উভয়ের তুল্য (১।২৭)। অপর কঙচ এবং কঙগ দুই ত্রিভুজ কঙচ কোণ কঙগ সমান ঙকচ কোণ ঙকগ সমান এবং কঙ বাহু উভয় পক্ষে সামান্য একারণ কঙচ এবং কঙগ দুই ত্রিভুজ সর্ব্বতোভাবে পরস্পরের সমান। (১।২৬) অতএব গচ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অধিকন্তু খকগ ত্রিভুজ কগচ এবং খগচ দুই ত্রিভুজের যোগতুল্য এবং কগচ ত্রিভুজ গঙ ও কঙ রেখার আয়ত তুল্য (১।৪১) তথা খগচ ত্রিভুজ গঙ এবং ঙঘ রেখার আয়ত তুল্য একারণ কখগ ত্রিভুজ গঙ ও কঙ রেখার আয়ত এবং গঙ ও ঙঘ রেখার আয়তের যোগ তুল্য সুতরাং তাহা গঙ.কঘ আয়তের সমান (২।১) অপিচ খকঘ এবং গকঙ দুই ত্রিভুজ সমান কোণি একারণ কঘ : খঘ :: কঙ : গঙ (৬।৪) তন্নিমিত্ত কঘ.গঙ আয়ত খঘ.কঙ সমান (৬।১৬) অতএব ইহারা প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের

equal to the area of the triangle ABC. Therefore, &c. Q. E. D.

PROP. N. THEOR.

If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line which bisects the angle opposite to the base: Four times the rectangle contained by the perpendiculars is equal to the rectangle contained by two straight lines, one of which is the base increased by the difference of the sides, and the other the base diminished by the difference of the sides.

Let ABC be any triangle, of which BC is the base, and AB the greater of the two sides, let AD be a line bisecting the angle opposite to the base, and BD, CE perpendiculars on that line: Four times the rectangle contained by BD and CE is equal to the rectangle contained by a straight line equal to BC + (AB—AC) and a straight line equal to BC—(AB—AC.)

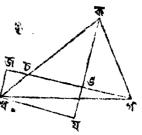
Produce CE the perpendicular drawn from one of the extremities of the base to meet the opposite side BA in F: and draw BH perpendicular to CF: The figure BHED thus formed will manifestly be a parallelogram (28. 1.): And because in the triangles AEC, AEF, the angle AEC is equal to AEF, EAC to EAF, and the side AE is common: the triangles are in all respects equal (26. 1.), and have AC = AF, and EC = EF: and because CF the base of the triangle CBF is bisected in E, and BH is drawn perpendicular to CF from the opposite angle,

ক্ষেত্র ফল তুল্য। অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

চ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী সরল রেখার উপর যদি ভূমির দুই প্রান্ত হইতে লম্বপাত হয় তবে ভূমিতে দুই ভুজের অন্তর যোগে উৎপন্ন সরল রেখার এবং ভূমি হইতে দুই ভুজের অন্তর বিয়োগে অবশিষ্ট সরল রেখার আয়ত ঐ দুই লম্বের আয়তের চতুর্গুণ হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমি এবং কখ বৃহত্তর ভুজ কল্পনা কর পরে শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী কঘ সরল রেখা নির্দ্দেশ করিয়া ভূমির প্রান্ত হইতে তাহার উপর খঘ গঙ লম্বপাত কর। খগ + (কখ—কগ) এবং খগ—(কখ—কগ) তুল্য দুই সরল রেখায় উৎপন্ন আয়ত

খঘ এবং গঙ রেখার আয়তের চতুর্গুণ তুল্য হইবে।

ভূমির এক প্রান্ত হইতে নিষ্কাসিত লম্ব গঙ রেখাকে সম্মুখবর্ত্তি কখ বাহুস্থ চ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং জখ রেখা গচ রেখার লম্ব ভাবে নিষ্কাসন কর তাহাতে স্পষ্ট বোধ হইবেক খজঙঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র (১২৮) অপর কঙগ কঙচ ত্রিভুজে কঙগ কোণ কঙচ সমান এবং ঙকগ কোণ ঙকচ সমান আর কঙ সামান্য বাহু, একারণ ঐ দুই ত্রিভুজ সর্ব্বতোভাবে পরস্পর সমান (১২৬) সুতরাং কগ = কচ এবং ঙগ = ঙচ। অধিকন্তু গখচ ত্রিভুজের গচ ভূমি ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এবং গচ বাহুর উপর সম্মুখস্থ কোণ হইতে খজ লম্বপাত হইয়াছে একারণ

$(BC + BF)(BC - BF) = 2FC.EH$ (Cor. 1. K. 6.)

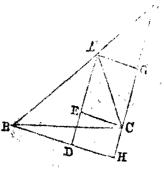
Now $BC + PF = BC + (BA - AC)$, and $BC - BF = BC - (BA - AC)$ and $2FC = 4CE$, and $EH = BD$ (34. 1.); therefore

$$\{BC + (BA - AC)\} \cdot \{BC - (BA - AC)\}$$

$= 4BD.CE$. Therefore, &c. Q. E. D.

PROF. O. THLOR.

If perpendiculars be drawn from the extremities of the base of a triangle on a straight line which bisects the angle opposite to the base: Four times the rectangle contained by the segments of the bisecting line between the angle and the perpendiculars, is equal to the rectangle contained by two straight lines, one of which is the sum of the sides increased by the base, and the other the sum of the sides diminished by the base.

Let ABC be any triangle, of which BC is the base, AD a line bisecting the opposite angle, and BD, CE perpendiculars on that line: Four times the rectangle contained by AD and AE is equal to the rectangle contained by a straight line equal to AB+AC+BC. and a straight line equal to AB+AC—BC.

উপর কছ লম্বপাত কর। এস্থলে স্পষ্ট বোধ হইবেক যে উক্ত রেখায় কছজঘ এবং কছগঙ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে (১। ২৮.২৯)। অপর কঘ চজ সমানান্তরাল একারণ খকঘ কোণ কচগ কোণের এবং ঙকগ কগচ কোণের তুল্য। পরন্তু খকঘ কল্পনা প্রমাণ ঙকগ সমান অতএব কগচ এবং কচগ দুই কোণ পরস্পর সমান। অপিচ কছগ কছচ ত্রিভুজের মধ্যে কছগ কোণ কছচ কোণের এবং কগছ কোণ কচছ কোণের সমান এবং কছ উভয় পক্ষেই সামান্য বাহু একারণ ঐ দুই ত্রিভুজ সর্ব্বতোভাবে সমান (১।২৬) সুতরাং কগ = কচ এবং গছ = ছচ।

অপর গখচ ত্রিভুজের গচ ভূমি ছ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত এবং সম্মুখস্থ কোণ হইতে ভূমির উপর খজ লম্বপাত হইয়াছে তন্নিমিত্ত

(চখ + খগ) (চখ—খগ) = ২ চগ. ছজ (৬। ঝ: অনু। অধিকন্তু চখ + খগ = কখ + কগ + খগ এবং চখ—খগ = কখ + কগ—খগ আর ২ চগ = ৪ গছ = ৪ কঙ (১। ৩৪) এবং ছজ = কঘ সুতরাং

(কখ + কগ + খগ) (কখ + কগ—খগ) = ৪ কঘ কঙ। অতএব ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

PROP. P. THEOR.

Four times the area of any triangle is a mean proportional between two rectangles, viz. one contained by a straight line equal to the sum of the sides increased by the base, and a straight line equal to the sum of the sides diminished by the base; and the other contained by a straight line equal to the base increased by the difference of the sides, and a straight line equal to the base diminished by the difference of the sides.

Let ABC be a triangle, and let BC, any one of the sides be taken as its base; four times the area of the triangle is a mean proportional between these two rectangles.

$(BA + AC + BC)(BA + AC - BC)$
$\{BC + (BA - AC)\}\{BC - (BA - AC)\}$.

Draw AD bisecting the angle opposite to the base, and draw CE, BD perpendiculars on AD. Because the triangles ABD, ACE are similar,

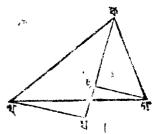
AD : DB : : AE : EC (4. 6.)
Now, AD : BD : : AD.AE : DB.AE (1. 6.)
And AE : EC : : BD.AE : BD.EC (1. 6.)
Therefore AD.AE : DB.AE : : BD.AE : BD.EC

৩ প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য।

ত্রিভুজের দুই বাহুতে ভূমি যোগ করিলে যে রেখার তুল্য হয় এবং ভূমি বিয়োগ করিলে যে রেখার তুল্য অবশিষ্ট থাকে তাদৃশ দুই সরল রেখাতে এক আয়ত উৎপন্ন হইলে এবং দুই বাহুর অন্তর ভূমিযোগে যে রেখা তুল্য হয় ও ভূমি বিয়োগে যে রেখার সমান অবশিষ্ট থাকে এমত দুই সরল রেখাতে আর এক আয়ত উৎপন্ন হইলে ঐ দুই আয়তের পক্ষে ত্রিভুজের চতুর্গুণ ক্ষেত্র ফল মধ্যানুপাতীয় হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ, তাহার খগ বাহু ভূমি রূপে গৃহীত হউক। ত্রিভুজের ক্ষেত্র ফল চতুর্গুণ হইলে নিম্ন লিখিত দুই আয়তের মধ্যানুপাতীয় হইবে যথা।

(কখ + কগ + খগ) (কখ + কগ—খগ)

{খগ + (কখ—কগ)} {খগ—(কখ—কগ)}

ভূমির সম্মুখস্থ কোণ দ্বিখণ্ডকারিণী কঘ সরল রেখা নিষ্কাসন কর এবং কঘ রেখার উপর গঙ এবং খঘ লম্ব পাত কর। অপর কখঘ এবং কগঙ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ একারণ

কঘ : ঘখ :: কঙ : ঙগ (৬,৪)

অপর কঘ : ঘখ :: কঘ. কঙ : ঘখ. কঙ (৬, ১)

এবং কঙ : ঙগ :: খঘ. কঙ : খঘ. ঙগ (৬, ১)

অতএব কঘ. কঙ : ঘখ. কঙ :: খঘ. কঙ : খঘ. ঙগ

এবং ৪ কঘ. কঙ : ৪ ঘখ. কঙ :: ৪ খঘ. কঙ : ৪ খঘ. ঙগ

And 4AD.AE : 4DB.AE : : 4BD.AE : 4BD.EC
But 4AD.AE=(AB+AC+BC) (AB+AC—BC)(O. 6.)
And 4DB.AE.=four times the area of the triangle ABC (M. 6.) And 4BD.EC= { BC+(BA-AC) } { BC—(BA-AC) } (N. 6.) Therefore,
(BA+AC+BC) (BA+AC—BC) : 4Tr. ABC : : 4Tr. ABC : { BC+(BA—AC) } { BC—(BA—AC) }

Therefore, &c. Q. E. D.

৫। নির্দ্দিষ্ট অথচ অসীম দুই সরল রেখার মধ্যবর্ত্তি এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমত এক রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যাহা ঐ দুই রেখাতে সীমাবদ্ধ অথচ ঐ নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৬। এক সমকোণকে ত্রিখণ্ড অর্থাৎ তিন সমান২ ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

৭। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে সমান২ কতিপয় খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে।

২ পরিচ্ছেদ।

৮। নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরিধির পৃষ্ঠভাগে সম্পতিত যত সরল রেখা দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে নিষ্কাসিত হইতে পারে তাহার মধ্যে যে২ রেখা সম্পাত চিহ্নস্থ স্পর্শক রেখার সহিত সমান২ কোণ উৎপন্ন করে সেই দুই রেখার যুতি সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূন হইবে।

৯। এক বৃত্তের কর্কটোপরি যদি অন্য বৃত্ত নিষ্কাসিত হয় তবে দুই বৃত্তের সম্পাত চিহ্ন হইতে বহিস্থ বৃত্ত পরিধি পর্য্যন্ত কোন সরল রেখা অঙ্কিত হইলে সেই রেখা অন্তরস্থ পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১০। দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিতে পারে এমত এক সরল রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে।

১১। কোন বৃত্ত পরিধিস্থ বিন্দু হইতে যদি কএকটি পূর্ণজ্যা নিষ্কাসিত হয় তবে সেই সকল পূর্ণজ্যার দ্বিখণ্ড হওন চিহ্নে এক বৃত্ত উৎপন্ন হইবে।

১২। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তরস্থ অথবা বহিস্থ কোন চিহ্ন দিয়া এমত এক রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে যে বৃত্ত দ্বারা ব্যবহিত তদংশ ব্যাসের অনধিক কোন রেখার তুল্য হয়।

13. If two chords of a given circle intersect each other, the angle of their inclination is equal to half the angle at the centre which stands on an arc equal to the sum or difference of the arcs intercepted between them, according as they meet within or without the circle.

14. In the diameter of a circle produced, to determine a point, from which a tangent drawn to the circumference shall be equal to the diameter.

15. To determine a point in the circumference of a circle, from which lines drawn to two other given points in the circumference, shall have a given ratio.

16. If any point be taken in the diameter of a circle, which is not the centre; of all the chords which can be drawn through that point, that is the least which is at right angles to the diameter.

17. To draw a straight line cutting two concentric circles so that the part of it which is intercepted by the circumference of the greater may be double the part intercepted by the circumference of the less: but the radius of the greater must not be more than twice the radius of the less.

18. If from any two points in the circumference of a circle there be drawn two straight lines to a point in a tangent to that circle; they will make the greatest angle when drawn to the point of contact.

19. If one chord in a circle bisect another, and tangents drawn from the extremities of each be pro-

ক্ষেত্র বিষয়ক প্রশ্ন।

ব্রাণ্ড নামক গ্রন্থকারের ক্ষেত্রতত্ত্ব বিষয়ক প্রশ্ন হইতে সংগৃহীত।

১ পরিচ্ছেদ।

১। দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সমান২ কোণ উৎপন্ন করিতে পারে এমত এক সরল রেখা নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নিষ্কাসন করিতে হইবে।

২। দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই সমান সরল রেখা এমন প্রকারে নিষ্কাসিত করিতে হইবে যেন কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার এক বিন্দুতে তাহারদের সম্পাত হয়।

৩। এক নির্দ্দিষ্ট রেখার এক পার্শ্বস্থ দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুই নির্দ্দিষ্ট রেখা এরূপে নিষ্কাসিত করিতে হইবে যেন তাহারা ঐ রেখাতে সম্পাতিত হইয়া তৎসহকারে সমান২ কোণ উৎপন্ন করে।

৪। এক নির্দ্দিষ্ট রেখার এক পার্শ্বস্থ দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ রেখাস্থ এক বিন্দুতে সম্পাতিত এমত দুই রেখা নিষ্কাসিত করিতে হইবে কিন্তু তাহারদের যুতি যেন ঐ বিন্দু দ্বয় হইতে ঐ রেখার অন্য কোন বিন্দু পর্য্যন্ত নিষ্কাসিত অন্য কোন দুই রেখার যুতি অপেক্ষা ন্যূন হয়।

5. From a given point between two indefinite right lines given in position, to draw a line which shall be terminated by the given lines, and bisected in the given point.

6. To trisect a right angle.

7. To divide a given finite straight line into any number of equal parts.

Section II.

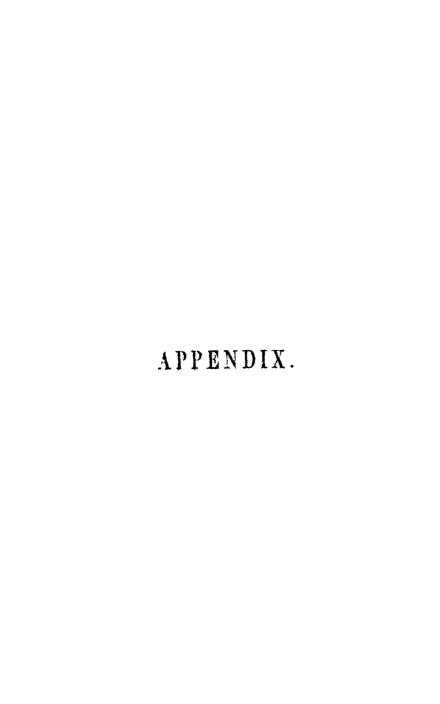
8. Of all straight lines which can be drawn from two given points to meet on the convex circumference of a given circle, the sum of those two will be the least, which make equal angles with the tangent at the point of concourse.

9. If a circle be described on the radius of another circle; any straight line drawn from the point where they meet, to the outer circumference, is bisected by the interior one.

10. To draw a straight line which shall touch two given circles.

11. If from a point in the circumference of a circle any number of chords be drawn; the locus of their points of bisection will be a circle.

12. Through a given point, either without or within a given circle, to draw a straight line, the part of which intercepted by the circle, shall be equal to a given line not greater than the diameter of the circle.

APPENDIX.

PROBLEMS

SELECTED FROM BLAND'S GEOMETRICAL PROBLEMS.

Section I.

1. Through a given point to draw a straight line which shall make equal angles with two straight lines given in position.

2. From two given points to draw two equal straight lines which shall meet in the same point of a line given in position.

3. From two given points on the same side of a line given in position, to draw two lines which shall meet in that line, and make equal angles with it.

4. From two given points on the same side of a line given in position, to draw two lines which shall meet in a point in this line, so that their sum shall be less than the sum of any two lines drawn from the same points and terminated at any other point in the same line.

অধিকন্তু ৪ কঘ.কঙ = (কখ + কগ + খগ) (কখ + কগ —খগ) ৬।ণ

এবং ৪ ঘখ. কঙ = কখগ ত্রিভুজের চতুর্গুণ ক্ষেত্র ফল (৬।ড)

এবং ৪খঘ.ঙগ = {খগ + (খক —কগ)} {খগ—খক—কগ)} (৬।ঢ) অতএব

(খক + কগ + খগ) (খক + কগ—খগ) : ৪ ত্রি. কখগ :: ত্রি কখগ : {খগ + (খক—কগ)} {খগ—(খক—কগ)}

অতএব ত্রিভুজের ইত্যাদি। ইহাই এস্থলে উপপাদ্য।

ষষ্ঠোধ্যায়ঃ সমাপ্তঃ।